



# Préparer le concours d'accès Médecine - ENSA - ENSAM

## S'ENTRAINER AUX QCM DE MATHS

- **Astuces et techniques du supérieur**
- **15 concours blancs commentés et corrigés en détails**
- **Solutions détaillées des concours de médecine – ENSA-ENSAM 2018/2020/2021/2022**
- **Solutions des concours d'accès aux grandes écoles françaises**
- **Sujets des concours FMD de 2008 à 2019**
- **Concours blancs pour la recherche**

## Conseils et consignes :

- **Dans un concours sous forme de QCM il faut une bonne gestion du temps .**
- **L'une des méthodes très important c'est la méthode d'élimination des cas, qui nous permet de se concentrer sur un nombre très restreint de cas possibles**
- **Dans un concours c'est très rare de tout traiter, l'important c'est de traiter le maximum possible et de se distinguer par rapport aux autres...**
- **Pour cela il faut s'entraîner à bien gérer son temps avant même d'arriver aux concours , savoir les questions à sacrifier et les questions auxquelles il faut donner la priorité**
- **De plus il faut connaître des techniques du supérieur comme la règle de l'Hôpital, des fonctions équivalentes, règles d'Alembert ,règles de Bioche , décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples...**
- **Chaque épreuve de maths dure 30 minutes**
- **Chaque questionnaire comporte 20 QSM**
- **Chaque QSM comporte une seule réponse juste**
- **L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite**

# Sommaire

**Consignes :** 02

## Chapitre 1 : Suites numériques :

- **Fiche 01 : Astuces pour les suites** 03
- **Sujet du concours blanc 01 : Suites numériques ( 20 QCM )** 06
- **Correction détaillée du concours blanc 01 : Suites numériques** 11

## Chapitre 2 : Etude des fonctions

- **Fiche 02 : Astuces et technique sur l'étude des fonctions** 22
- **Sujet du concours blanc 02 : Etude des fonctions\_( 20 QCM )** 26
- **Correction détaillée du concours blanc 02 : Etude des fonctions** 31

## Chapitre 3 : Intégrale d'une fonction

- **Fiche 03 : Astuces et technique pour les intégrales** 45
- **Sujet du concours blanc 03 : Intégrales\_( 20 QCM )** 47
- **Correction détaillée du concours blanc 03 : Intégrales** 52

## Chapitre 4 : Nombres complexes

- **Fiche 04 : Astuces et technique pour les nombres complexes** 65
- **Sujet du concours blanc 04 : Nombres complexes\_( 20 QCM )** 67
- **Correction détaillée du concours blanc 04 : Etude des fonctions**

## Chapitre 5 : Probabilités-Géométries -Equations différentielles

- **Fiche 05 : Astuces et technique** 79
- **Sujet du concours blanc 05 : ( 20 QCM )** 82
- **Correction détaillée du concours blanc 05** 90

## Chapitre 6 (ENSA) : Analyse(SM)-Algèbre(SM)

- **Fiche 06 : Astuces et technique** 95
- **Sujet du concours blanc 05 : ( 20 QCM )** 100
- **Correction détaillée du concours blanc 06 (ENSA20222)** 107

## Chapitre 7 : Concours

- **Correction détaillée du concours FMD -ENSA-ENSAM 2022** 114
- **Correction détaillée du concours commun de FMD 2021** 125
- **Correction détaillée du concours commun de FMD 2020** 147
- **Correction détaillée du concours casa de FMD 2019** 167
- **Concours blanc avec la correction détaillée** 180
- **Concours de FMD blanc 11 pour la recherche** 189
- **Concours de FMD blanc 12 pour la recherche** 199
- **Concours de FMD blanc 13 pour la recherche** 210
- **Concours corrigés de grandes écoles françaises** 230
- **Concours de FMD -OUJDA-CASA-FES-RABAT- de 2010 à 2019** 250

Suite Géométrique- arithmétique

$(U_n)$ géométrique	$(U_n)$ arithmétique
$U_{n+1} = qU_n$	$U_{n+1} = U_n + r$
$U_n = U_p \times q^{n-p}$	$U_n = U_p + (n - p)r$
$S_n = U_0 + \dots + U_n$ $= U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$	$S_n = U_0 + \dots + U_n$ $= \frac{(n + 1)(U_0 + U_n)}{2}$
$S_n = U_p + \dots + U_n$ $= U_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$	$S_n = U_p + \dots + U_n$ $= \frac{(n - p + 1)(U_p + U_n)}{2}$
$S_n = 1 + q \dots + q^n$ $= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$	$S = 1 + 2 \dots + n$ $= \frac{n(n + 1)}{2}$
$q^n + q^{n+1} + \dots + q^m$ $= \frac{q^n - q^{m+1}}{1 - q}$	$S = n + (n + 1) + \dots + m$ $= \frac{(n - m + 1)(n + m)}{2}$
$U_n U_{n+2} = (U_{n+1})^2$	$U_n + U_{n+2} = 2U_{n+1}$

Limite d'une suite

- $\left\{ \begin{array}{l} V_n < U_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- $\left\{ \begin{array}{l} U_n < V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$
- $\left\{ \begin{array}{l} V_n < U_n < W_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- $\left\{ \begin{array}{l} |U_n - l| < V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- $q < -1 \Rightarrow (q^n)$  n'admet pas de limite
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_1 + \dots + U_n}{n} = l$

Suite :  $u_{n+1} = au_n + b$

- Si  $a = 1$  alors la suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $b$
- Si  $a \neq 1$  alors on pose  $l = \frac{b}{1-a}$   
la suite  $(v_n)$  défini par  $v_n = u_n - l$  est géométrique de raison  $a$  de plus :  
 $(\forall n \geq p); u_n = (u_p - l)a^{n-p} + l$

Astuces

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 ; q > 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0 ; a > 0 \text{ et } q > 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = 0 ; a > 0 \text{ et } b > 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n)^a}{e^{nb}} = 0 ; a > 0 \text{ et } b > 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n+b}\right)^{n+c} = e^a$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{bn}\right)^{cn} = e^{\frac{ca}{b}}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a ; a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = a ; a > b > 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) ; a > 0 \text{ et } b > 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \sin^a(n) + \beta \cos^b(n)}{n} = 0 ; a > 0 \text{ et } b > 0$

Règle d'Alembert

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \geq 0$  et  $(U_n)$  positive :

- Si  $l > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- Si  $l < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

La suite  $(V_n)$  définie par :  $V_n = f(U_n)$

Si la fonction  $f$  est continue en  $l$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = f(l)$$

La suite  $(U_n)$  liée à une fonction  $f$ ,  
définie par :  $U_{n+1} = f(U_n)$

$f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$   
et  $(U_n)$  une suite définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = f(U_n) \text{ et } U_0 \in I ; \text{ si}$$

$\Rightarrow f$  est continue sur  $I$  et  $f(I) \subset I$

$\Rightarrow$  La suite  $(U_n)$  est convergente

Alors la limite de la suite  $(U_n)$  est la solution de l'équation  $f(x) = x$

**Symboles :  $\sum$  et  $\prod$**

$n \in \mathbb{N}$  et  $a_0; a_1; a_2 \dots a_n$  des nombres réels

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=n}^m k = \frac{(m-n+1)(n+m)}{2}$
- $\sum_{k=0}^n (ak + b) = \frac{(n+1)(na+2b)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=n}^m q^k = \frac{q^n - q^{m+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=1}^n kq^k = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(1-q)^2}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $\sum_{k=n}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
- $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i; j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{0 \leq x \leq n} E(x) = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n-k} = (a+b)^n$  ; (BN)
- $\sum_{k=1}^n C_n^k a^k = (a+1)^n$
- $\sum_{k=1}^n C_n^k = 2^n$
- $\sum_{k=1}^n k C_n^k = n2^{n-1}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$
- $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

**Changement d'indice :**

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p+m}^{k=n+m} a_{k-m}$$

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p-m}^{k=n-m} a_{k+m}$$

**Exemple 1 :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{p^2 - 1} = ?$$

**Astuce :**  $\frac{1}{p^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right)$

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{p=2}^n \frac{1}{p^2 - 1} \\ &= \sum_{p=2}^n \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=2}^n \frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^n \frac{1}{p+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{n+1} \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} - \sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{3}{4}$

**Exemple 2 :**

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{12} C_n^{12} \right) - 34 = \frac{1}{2} \times (2^{12}) - 34 = 2^{11} - 34 = 2048 - 34 = 2014$$

**Exemple 3 :**

$$S = \sum_{k=1}^{35} k^2 = \frac{35 \times (35+1) (2(35)+1)}{6} = \frac{35 \times 36 \times 71}{6} = 14910$$

**Exemple 4 :**

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**Q1**

Soit la suite  $(u_n)$  suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $(q > 0)$  tel que  $u_1 = 2$  et  $u_2 = 4$  donc  $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  égale :

A	B	C	D	E
$2^n - 1$	$2^{n+1} - 1$	$\frac{1}{2}(2^n - 1)$	$2^n + 1$	$1 - 2^{n+1}$

**Q2 ( Concours de médecine 2022 question 04 )**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n}$  est égale à :

A	B	C	D	E
$-\infty$	0	1/2	1	Autre réponse

**Q3 ( Concours de médecine 2022 question 12 )**

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022$  alors x est égal à :

A	B	C	D	E
$\frac{29}{7} \ln 2022$	$2022 \ln \frac{7}{29}$	$2022 \ln \frac{29}{7}$	$\frac{7}{29} \ln 2022$	Autre réponse

**Q4 ( Concours de médecine 2022 question 12 )**

Si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite telle que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n$ . Alors :

A	B	C	D	E
$v_8 = 31$	$v_8 = 53$	$v_8 = 54$	$v_8 = 62$	$v_8 = 64$

**Q5 ( Concours de marakech 2016/2015 question 01 )**

Si  $(v_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $v_0 = 2$  de raison r tel que  $(v_n)$  est décroissante et  $4(v_1)^2 + (v_2)^2 = 164$ . Alors

A	B	C	D	E
$r = -2$	$r = -4$	$r = -6$	$r = 2$	$r = 4$

**Q6 ( Concours de marakech 2016/2015 question 02 )**

Soit la suite  $(u_n)$  suite géométrique de premier terme  $u_1 = 5$  et de raison  $(q > 0)$  tel que  $u_9 = 1280$  alors

A	B	C	D	E
$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$

Pour tout  $n$  entier et  $n \geq 2$ , on pose:

$$\pi_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Si la suite  $(\pi_n)$  est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	3	2

Q8

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = 2u_n + 3$  et  $u_0 = 0$ .  
la limite de  $(u_n)$

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\infty$

Q9

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	2

Q10

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n \text{ et } U_0 = 1 ; U_1 = 2$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $V_n = U_{n+1} - U_n$  alors :

A	Pour tout $n \in \mathbb{N} : V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
B	Pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
C	$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$
D	$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$
E	$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

Q11

Soit  $(u_n)$  définie la suite tel que ;  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$  et  $u_0 = 1$ .

Si  $(u_n)$  est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

Soit  $(u_n)$  définie la suite tel que ;  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = 2U_n^2 + \frac{1}{8}$  et  $U_0 = 0$ .

Si  $(u_n)$  est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Q13

Soit  $(U_n)_{n \geq 5}$  une suite tel que  $(\forall n \geq 5) : U_n = \left( \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right)^n$

La limite de la suite  $(U_n)$  est :

A	B	C	D	E
0	1	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Q14 ( *Concours de marakech 2016/2015 question 01* )

Soit la suite  $(u_n)$  suite arithmétique tel que  $u_2 + u_3 + u_4 = 21$  et  $u_6 = 25$

Alors le premier terme  $u_0$  est égale à :

A	B	C	D	E
6	-52	-11	-36	-6

Q15 ( *Concours de marakech 2016/2015 question 02* )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} + (n^2)^{\frac{1}{n}} \right)$$

A	B	C	D	E
2	0	$+\infty$	$-\infty$	1

Q16 ( *Concours de marakech 2011/2010 question 05* )

Soit la suite  $(u_n)$  suite arithmétique tel que  $u_3 + u_4 + \dots + u_{10} = 672$  et  $u_7 = 81$

Alors le terme  $u_3$  est égale à :

A	B	C	D	E
103	213	123	105	107

Q17 ( *Concours de marakech 2010/2011 question 06* )

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{1}{512} =$$

A	B	C	D	E
$\frac{513}{824}$	$\frac{172}{521}$	$\frac{171}{512}$	$\frac{571}{723}$	$\frac{571}{732}$

Lesquelles des suites suivantes sont convergentes ?

A	B	C	D	E
$\left(n - \frac{3}{n}\right)$	$\left(-1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$	$\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)$	$\left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)$	$\left(\left(\frac{e}{2}\right)^n\right)$

Q19 ( *Concours de casablanca 2008/2009 question 07* )

Soit  $(u_n)$  définie la suite tel que ;  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{1}{U_n}\right)$  et  $U_0 = 1$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n =$

A	B	C	D	E
-1	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	1	N'existe pas

Q20

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites tels que ;  $u_0 = \alpha$  et  $v_0 = \beta$  avec  $0 < \alpha < \beta$  et

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$

On pose  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n =$

A	B	C	D	E
1	$+\infty$	$\frac{\alpha}{\beta}$	0	N'existe pas

**Q1**

Soit la suite  $(u_n)$  suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $(q > 0)$  tel que  $u_1 = 2$  et  $u_2 = 4$  donc  $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  égale :

A	B	C	D	E
$2^n - 1$	$2^{n+1} - 1$	$\frac{1}{2}(2^n - 1)$	$2^n + 1$	$1 - 2^{n+1}$

Réponse B :

$$\text{On a : } q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ donc } u_1 = 2u_0 \text{ donc } u_0 = \frac{u_1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

**Q2 ( Concours de médecine 2022 question 04 )**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n}$  est égale à :

A	B	C	D	E
$-\infty$	0	1/2	1	Autre réponse

Réponse C :

Première méthode :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Deuxième méthode

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - (n^2 - n)}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Q3 ( Concours de médecine 2022 question 12 )**

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022$  alors x est égal à :

A	B	C	D	E
$\frac{29}{7} \ln 2022$	$2022 \ln \frac{7}{29}$	$2022 \ln \frac{29}{7}$	$\frac{7}{29} \ln 2022$	Autre réponse

Réponse D :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022 \Rightarrow e^{\frac{29}{7}x} = 2022 \Rightarrow \frac{29}{7}x = \ln(2022) \Rightarrow x = \frac{7}{29} \ln(2022)$$

Si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite telle que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n$ . Alors :

A	B	C	D	E
$v_8 = 31$	$v_8 = 53$	$v_8 = 54$	$v_8 = 62$	$v_8 = 64$

## Réponse A :

On a  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n$  ; (L1)

Donc  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \dots + v_n + v_{n+1} = 2(n+1)^2 + n+1$  ; (L2)

Donc  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 2(n+1)^2 + (n+1) - 2n^2 - n$  ; (L2 - L1)

Donc  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 + n + 1 - 2n^2 - n = 4n + 3$

Donc  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 4n + 3$

Donc : on prend  $n = 7$  on trouve  $v_8 = (4 \times 7) + 3 = 31$

Q5 ( *Concours de marakech 2016/2015 question 01* )

Si  $(v_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $v_0 = 2$  de raison  $r$  tel que  $(v_n)$  est décroissante et  $4(v_1)^2 + (v_2)^2 = 164$ . Alors

A	B	C	D	E
$r = -2$	$r = -4$	$r = -6$	$r = 2$	$r = 4$

## Réponse C :

On a  $(v_n)$  est une suite arithmétique décroissante donc  $r \leq 0$

Et on a  $(\forall n ; p \in \mathbb{N}) : v_n = v_p + (n - p)r$

$$4(v_1)^2 + (v_2)^2 = 164 \Rightarrow 4(2 + r)^2 + (2 + 2r)^2 = 164$$

$$\Rightarrow 4(2 + r)^2 + 4(1 + r)^2 = 164$$

$$\Rightarrow (2 + r)^2 + (1 + r)^2 = 41$$

$$\Rightarrow r^2 + 3r - 18 = 0$$

$$\Rightarrow r = -6 \text{ ou } r = 3$$

Donc  $r = -6$  car  $r \leq 0$

Q6 ( *Concours de marakech 2016/2015 question 02* )

Soit la suite  $(u_n)$  suite géométrique de premier terme  $u_1 = 5$  et de raison  $(q > 0)$  tel que  $u_9 = 1280$  alors

A	B	C	D	E
$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$

## Réponse B :

On a  $u_n = u_p q^{n-p}$  donc  $u_9 = u_1 q^{9-1}$  donc  $q^8 = \frac{u_9}{u_1} = \frac{1280}{5} = 256$

Donc  $q^8 = 2^8$  donc  $|q| = 2$  et on a  $(q > 0)$  donc  $q = 2$

Pour tout  $n$  entier et  $n \geq 2$ , on pose:

$$\pi_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Si la suite  $(\pi_n)$  est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	3	2

Réponse C :

Il faut remarquer que  $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

$$\pi_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\pi_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \times \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \times \dots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$\pi_n = \frac{1 \times 3}{2^2} \times \frac{2 \times 4}{3^2} \times \frac{3 \times 5}{4^2} \times \dots \times \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$\pi_n = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{2n} = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

Car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Q8

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = 2u_n + 3$  et  $u_0 = 0$ .  
la limite de  $(u_n)$

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\infty$

Réponse D :

**Méthode 01 :** Suite :  $u_{n+1} = au_n + b$  avec  $a = 2$  et  $b = 3$

- Si  $a = 1$  alors la suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $b$
- Si  $a \neq 1$  alors on pose  $l = \frac{b}{1-a} = \frac{3}{1-2} = -3$

la suite  $(v_n)$  définit par  $v_n = u_n - l = u_n + 3$  est géométrique de raison  $a = 2$  de plus :

$(\forall n \geq p); u_n = (u_p - l)a^{n-p} + l$ , donc  $(\forall n \geq 0); u_n = 3 \times 2^n + 3$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Puis montrons par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$

Et par suite on a :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

**Q9**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	2

**Réponse E :**

On reconnaît les  $n$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier

terme 1. Donc :  $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ , ( car  $-1 < \frac{1}{2} < 1$  ) ; Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1$ .

Et donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2$ . ; D'où,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$ .

**Q10**

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n \text{ et } U_0 = 1 ; U_1 = 2$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $V_n = U_{n+1} - U_n$  alors :

A	Pour tout $n \in \mathbb{N} : V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
B	Pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
C	$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$
D	$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$
E	$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

**Réponse A :**

$$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n - U_{n+1}$$

$$= \left(\frac{5}{3} - 1\right)U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n = \frac{2}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n = \frac{2}{3}(U_{n+1} - U_n) = \frac{2}{3}V_n$$

Donc la suite  $(V_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{2}{3}$  et de premier terme  $V_0$  avec :

$$V_0 = U_1 - U_0 = 1 \text{ . Soit } n \in \mathbb{N} \text{ on a ; } V_n = V_0 \times (q)^{n-0} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ donc } V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Soit  $(u_n)$  définie la suite tel que ;  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$  et  $u_0 = 1$ .

Si  $(u_n)$  est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

Réponse D :

Considérons la fonction par  $f: x \rightarrow \sqrt{2x + 3}$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x + 3} = x \Leftrightarrow 2x + 3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3$$

Donc si  $(u_n)$  est convergente alors la limite est  $-1$  ou bien  $3$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{-(u_n + 1)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

On peut démontrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 3$  donc

$$1 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow u_n + 1 \geq 0 \text{ et } u_n - 3 \leq 0 \text{ et } \sqrt{2u_n + 3} + u_n > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{-(u_n + 1)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Donc la suite  $(u_n)$  est croissante, d'où la limite de  $(u_n)$  est  $3$

## Q12

Soit  $(u_n)$  définie la suite tel que ;  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = 2U_n^2 + \frac{1}{8}$  et  $U_0 = 0$ .

Si  $(u_n)$  est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Réponse C :

Soit  $n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n = 2U_n^2 + \frac{1}{8} - U_n = 2(U_n - \frac{1}{4})^2$ , donc la suite  $(U_n)$  est croissante

Considérons la fonction définie sur  $[0; \frac{1}{4}]$  par  $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{8}$

- $f$  est continue sur l'intervalle  $[0; \frac{1}{4}]$
- $f\left(\left[0; \frac{1}{4}\right]\right) = \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right] \subset \left[0; \frac{1}{4}\right]$  \*  $u_0 = 0 \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$

Alors la limite de  $(u_n)$  est  $L$  la solution de l'équation  $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{1}{8} = x \Leftrightarrow 2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Remarque : la suite  $(U_n)$  est majorée par  $\frac{1}{4}$ , ( par récurrence ) donc elle est convergente

Soit  $(U_n)_{n \geq 5}$  une suite tel que  $(\forall n \geq 5) : U_n = \left( \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right)^n$

La limite de la suite  $(U_n)$  est :

A	B	C	D	E
0	1	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Réponse A :

Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 5$

On a :  $\left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}$  ; Et on a  $n \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{4}$

Donc  $\left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$  ; Donc  $\left( \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right)^n \leq \left( \frac{3}{4} \right)^n$

D'ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

Q14 ( *Concours de marakech 2016/2015 question 01* )

Soit la suite  $(u_n)$  suite arithmétique tel que  $u_2 + u_3 + u_4 = 21$  et  $u_6 = 25$

Alors le premier terme  $u_0$  est égale à :

A	B	C	D	E
6	-52	-11	-36	-6

Réponse B :

On a la suite  $(u_n)$  suite arithmétique donc pour tout  $n; p$  :  $u_n = u_p + (n - p)r$

$u_2 + u_3 + u_4 = 21 \Leftrightarrow u_6 - 4r + u_6 - 3r + u_6 - 2r = 21$

$\Leftrightarrow 3u_6 - 9r = 21$

$\Leftrightarrow 75 - 9r = 21 \Leftrightarrow 9r = 54 \Leftrightarrow r = 6$

Donc :  $u_0 = u_6 - 6r = 25 - 36 = -11$

Q15 ( *Concours de marakech 2016/2015 question 02* )

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} + (n^2)^{\frac{1}{n}} \right)$

A	B	C	D	E
2	0	$+\infty$	$-\infty$	1

Réponse A :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} + (n^2)^{\frac{1}{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} + e^{\frac{1}{n} \ln(n^2)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} + e^{\frac{2 \ln(n)}{n}} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Soit la suite  $(u_n)$  suite arithmétique tel que  $u_3 + u_4 + \dots + u_{10} = 672$  et  $u_7 = 81$   
Alors le terme  $u_3$  est égale à :

A	B	C	D	E
103	213	123	105	107

Réponse D :

On a la suite  $(u_n)$  suite arithmétique donc pour tout  $n; p$  :  $u_n = u_p + (n - p)r$

$$u_3 + u_4 + \dots + u_{10} = \frac{(10 - 3 + 1)(u_2 + u_{10})}{2} = 4(u_7 - 4r + u_7 + 3r) = 4(162 - r)$$

Et on a :  $u_3 + u_4 + \dots + u_{10} = 672$  donc  $4(162 - r) = 672$  donc  $r = -6$

D'où  $u_n = u_7 - 4r = 81 + 24 = 105$

Q17 ( *Concours de marakech 2010/2011 question 06* )

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{1}{512} =$$

A	B	C	D	E
$\frac{513}{824}$	$\frac{172}{521}$	$\frac{171}{512}$	$\frac{571}{723}$	$\frac{571}{732}$

Réponse C :

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{1}{512}$$

$$= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{171}{512}$$

Q18 ( *Concours de casablanca 2013/2014 question 06* )

Lesquelles des suites suivantes sont convergentes ?

A	B	C	D	E
$\left(n - \frac{3}{n}\right)$	$\left(-1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$	$\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)$	$\left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)$	$\left(\left(\frac{e}{2}\right)^n\right)$

Réponse B :

On a  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$  donc  $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

Donc  $-1 - \frac{1}{n} \leq -1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq -1 + \frac{1}{n}$

Et on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{n} = -1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \frac{(-1)^n}{n} = -1$

Soit  $(u_n)$  définie la suite tel que ;  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{1}{U_n})$  et  $U_0 = 1$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n =$

A	B	C	D	E
-1	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	1	N'existe pas

Réponse D :

On a  $U_0 = 1$  donc  $U_1 = \frac{1}{2}(U_0 + \frac{1}{U_0}) = 1$  D'où :  $\forall n \in \mathbb{N}; U_n = 1$  (Par récurrence)

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$  (On peut résoudre l'équation  $f(x) = x$  avec  $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ )

Q20

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites tels que ;  $u_0 = \alpha$  et  $v_0 = \beta$  avec  $0 < \alpha < \beta$  et

$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}$  et  $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$

On pose  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$  ; Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n =$

A	B	C	D	E
1	$+\infty$	$\frac{\alpha}{\beta}$	0	N'existe pas

Réponse D :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  :  $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2}{v_n^2} = w_n^2$

Donc :  $w_{n+1} = w_n^2$

On a  $0 < \alpha < \beta$  donc  $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$  ; Donc  $w_0 = \frac{\alpha}{\beta} \in ]0; 1[$

Considérons la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = x^2$

- $f$  est continue sur l'intervalle  $[0; 1]$
- $f([0; 1]) = [0; 1] \subset [0; 1]$
- $w_0 = \frac{\alpha}{\beta} \in [0; 1]$
- Par suite on peut montrer par récurrence que  $w_n \in [0; 1]$
- Soit  $x \in [0; 1]$

$$f(x) - x = x^2 - x = x(x - 1) \leq 0$$

Donc  $(w_n)$  est décroissante

- On a  $(w_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente

Alors la limite de  $(u_n)$  est L la solution de l'équation  $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

Et comme  $(w_n)$  est décroissante donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

### Dérivabilité et continuité d'une fonction

- $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- $f$  dérivable sur  $I \Rightarrow f$  est continue sur  $I$
- $f$  dérivable en  $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

l'équation de la tangente en  $a$  est :

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Rightarrow f$  n'est pas dérivable en  $a \Rightarrow (Cf)$  admet une demi tangente verticale en  $A(a; f(a))$  dirigée vers le haut

### Les fonctions dérivées

- $(ax + b)' = a$  ;  $(ax^2)' = 2ax$
- $(ax^n)' = anx^{n-1}$  ;  $(aU^n)' = a nU'U^{n-1}$
- $\left(\frac{a}{x}\right)' = \frac{-a}{x^2}$  ;  $\left(\frac{a}{U}\right)' = \frac{-aU'}{U^2}$
- $\left(\frac{a}{x^n}\right)' = \frac{-an}{x^{n+1}}$  ;  $\left(\frac{a}{U^n}\right)' = \frac{-anU'}{U^{n+1}}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ;  $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$
- $(\sqrt[n]{x})' = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$  ;  $(\sqrt[n]{U})' = \frac{U'}{U \cdot n}$
- $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$  ;  $\left(\frac{aU+b}{cU+d}\right)' = \frac{(ad-bc)U'}{(cx+d)^2}$
- $(UV)' = U'V + UV'$  ;  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$
- $(e^x)' = e^x$  ;  $(e^{U(x)})' = U'(x)e^{U(x)}$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  ;  $\ln'(U) = \frac{U'}{U}$
- $(a^x)' = a^x \ln(a)$  ;  $(a^U)' = U' a^U \ln(a)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$  ;  $(\cos x)' = \sin x$
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(f(U))' = U' f'(U)$  ;  $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'[f^{-1}(a)]}$

### T.V.I et Fonction réciproque

- Si  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $[a; b]$  et  $f(a) \times f(b) < 0$   
Alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[a; b]$
- Si  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ ,  
Alors la fonction  $f$  admet une fonction réciproque, notée  $f^{-1}$ , définie sur  $J = f(I)$
- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

### Convexité de $(Cf)$ et les Points d'inflexions

- Si  $f'' \geq 0$  sur  $I$  alors  $(Cf)$  est convexe  $\cup$
- Si  $f'' \leq 0$  sur  $I$  alors  $(Cf)$  est concave  $\cap$
- Si  $f''$  s'anulle et change le signe en  $a$  alors  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion

### POSITION RELATIVE de $(Cf)$ et $(\Delta)$

Pour étudier la position relative de  $(Cf)$  est la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = ax + b$

On étudie le signe de  $f(x) - (ax + b)$

- Si  $f(x) - (ax + b) \geq 0$  alors la courbe  $(Cf)$  est au dessus de  $(\Delta)$
- Si  $f(x) - (ax + b) \leq 0$  alors la courbe  $(Cf)$  est au dessous de  $(\Delta)$

### POINTS D'INTERSECTIONS

- ❖ Pour déterminer les points d'intersection de  $(Cf)$  avec l'axe des abscisses  $(Ox)$  On résout l'équation  $f(x) = 0$
- ❖ Pour déterminer les points d'intersection de  $(Cf)$  et  $(Cg)$  on résout l'équation  $f(x) = g(x)$

### Les éléments de symétrie de $(Cf)$

- la droite d'équation  $(\Delta): x = a$  est un axe de symétrie de  $(Cf)$  ssi  $\forall x \in D_f$  :  
 $(2a - x) \in D_f$  et  $f(2a - x) = f(x)$
- La fonction  $f$  est paire ssi  $\forall x \in D_f$  :  
 $(-x) \in D_f$  et  $f(-x) = f(x)$

La droite  $(Oy)$  est un axe de symétrie de  $(Cf)$

- Le point  $A(a; b)$  est centre de symétrie de  $(Cf)$  ssi  $\forall x \in D_f$  :

$$(2a - x) \in D_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b$$

- La fonction est impaire ssi  $\forall x \in D_f$  :  
 $(-x) \in D_f$  et  $f(-x) = -f(x)$

Le point  $O$  est centre de symétrie de  $(Cf)$

- $f$  périodique de période  $T$  ssi  $\forall x \in D_f$

$$(x + T) \in D_f \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

**La fonction logarithme népérien**

- $D_{\ln} = ]0, +\infty[$  et ;  $\ln(1) = 0$
- $\text{Ln}(e) = 1$  avec  $e \approx 2,7$

**Propriétés algébrique le la fonction ln**

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$  ;  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln(x^r) = r \ln(x)$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

**Equations et inéquations**

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$
- **Le signe de ln:**  $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$   
 $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$   
 $\text{Ln}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\text{Ln}(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$

**Limites de la fonction ln ;  $\alpha > 0$  ;  $\beta > 0$**

- **FI:**  $\frac{0}{0}$  ;  $\frac{\infty}{\infty}$  ;  $0 \times \infty$  ;  $+\infty - (+\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$  ;  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\ln(x) - \ln(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{1}{\alpha}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_\alpha(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(\alpha)}$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\alpha x)}{\ln(\beta x)} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos \alpha x)}{\ln(\cos \beta x)} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$  ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^{2\alpha} + \beta} - x^\alpha = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(P(x))}{Q(x)} = 0$  /  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{E(x)}{x} = 1$  ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{E(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \dots \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \dots \sqrt{x + \sqrt{x}}} = 0$   
(n + 1)fois nfois
- $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$  ; f dérivable en  $\alpha$
- $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(\alpha) - \alpha f(x)}{x - \alpha} = f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$
- Règle de L'HOSPITALE :  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'}{g'}$

**La fonction exponentielle**

- Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$  :  $\exp(x) = e^x$
- Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $e^x > 0$  et  $e^0 = 1$

**Propriétés algébriques le la fonction exp**

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$  ;  $e^x \neq 0$  ;  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$  et  $(e^x)^r = e^{rx}$  ;  $r \in \mathbb{Q}$

**Equations et inéquations**

- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$  ;  $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
- $\text{Ln}(e^x) = x$  et  $e^{\text{Ln}(a)} = a$  ; avec  $a > 0$
- $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$  ; avec  $a > 0$

**Limites de la fonction exp**

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^{\beta x} = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^\alpha}{x - \alpha} = e^\alpha$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} = \alpha - \beta$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

**Fonctions équivalentes au voisinage de 0**

- $\sin x \sim x$  ;  $\tan x \sim x$  ;  $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \sim x$  ;  $\ln(1-x) \sim -x$  ;  $e^x \sim 1+x$
- $(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x$  ;  $(1-x)^\alpha \sim 1-\alpha x$
- $\frac{1}{1+x} \sim 1-x$  ;  $\frac{1}{1-x} \sim 1+x$
- $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}$  ;  $\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{x}{2}$

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

QCM 1:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} =$				
A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

QCM 2: ( Question 09 concours commun faculté de médecine 2022)

ABCD est un carré de coté 1. On place les points E et F respectivement sur les coté [AB] et [BC] tels que $BE = CF = x$ La valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :				
A	B	C	D	E
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

QCM 3:

$f$ une fonction définit sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \ln x}{1+x}$ , alors $f'(x)$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{1+x+\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1+2x+\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1+x+2\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1+x-\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1-x+\ln x}{(x+1)^2}$

QCM 4:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)} =$				
A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

QCM 05:

Considérons dans $]0 ; +\infty[$ l'équation suivante : (E): $\ln^5(x) + \ln(x) + 2e^x - \frac{1}{x} - 3 = 0$ Alors dans $]0 ; +\infty[$ l'équation (E) admet			
A	B	C	D
Deux solutions	Une unique solution	Trois solutions	N'admet pas de solution

**QCM 06 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$

A	B	C	D	E
$n$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	<b>1</b>	<b>0</b>

**QCM 7 :**

ABC un triangle rectangle en A tel que  $BC = 8\text{cm}$   
Posons  $AC = x$ , et notons  $P(x)$  le périmètre du triangle ABC  
Le périmètre maximale du triangle ABC est :

A	B	C	D	E
$8 + \sqrt{2}$	$8 - 4\sqrt{2}$	$8 + 8\sqrt{2}$	$8 + 2\sqrt{2}$	<b>Autre réponse</b>

**QCM 08 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(x)}{1 - \cos^2(x)}$$

A	B	C	D	E
$n$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n}{2}$	<b>0</b>

**QCM 09 :** ( Question 17 concours commun faculté de médecine 2022)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(2x - 1) = x^2 + 3x$   
Alors  $f(1) + f'(1)$  est égale à

A	B	C	D	E
$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	<b>Autre réponse</b>

**QCM 10 :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x}} =$$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	<b>0</b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

**QCM 11:** ( Question 19 concours commun faculté de médecine 2022)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

Et (C) sa courbe dans un repère orthonormé

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

A	B	C	D
$y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{n^2-1}{2}$

**QCM 12:**

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^5 = 0$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	-1

**QCM 13:**

Soit  $f$  une fonction Définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2} ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} ; x < 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

L'ensemble de définition de  $f$  est :

A	B	C	D	E
$]2; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$[-2; +\infty[$	$]-1; 2[ \cup ]2; +\infty[$	Autre réponse

**QCM 14:**

$g$  une fonction définit sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

Alors  $g'(x) =$

A	B	C	D	E
$\frac{-1}{(x+1)^2}$	$\frac{-1}{(x-1)^2}$	$\frac{-1}{x(x-1)^2}$	$\frac{-2}{x(x+1)^2}$	$\frac{-1}{x(x+1)^2}$

**QCM 15:**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) =$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	-1

**QCM 16:**

On considère dans  $\mathbb{R}^2$  le systèmes suivant (S):  $\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

Alors l'ensemble des solutions de système (S) est :

A	B	C	D	E
$\{(e^{-2}; e^5)\}$	$\{(e^5; e^{-2})\}$	$\{(e^2; e^{-5})\}$	$\{(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})\}$	N'admet pas de solutions

**QCM 17:**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x =$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	2

**QCM 18:**

$f$  une fonction définit sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = (\ln x - 1)e^{x-1}$ , alors

A	$f''(x) = \frac{(x^2 \ln x - x^2 - 1)e^{x-1}}{x^2}$
B	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 \ln x)e^{x-1}}{x^2}$
C	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 \ln x - x^2 - 1)e^{x+1}}{x^2}$
D	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 \ln x - x^2 - 1)e^{x-1}}{x^2}$
E	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 \ln x + x^2 + 1)e^{x-1}}{x^2}$

**QCM 19:** ( Question 7 concours de FMD casa 2019)

La courbe de la fonction  $f$  définit par :  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+e^x}$  admet au point  $O(0; 0)$  une tangente d'équation :

A	B	C	D	E
$y = x + 1$	$y = x$	$y = 2x$	$y = -2x$	$y = x - 1$

**QCM 20:**

Soit ;  $a > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$

A	B	C	D	E
$-\frac{1}{\sqrt{a}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$-\frac{2}{\sqrt{a}}$

**Etude des fonctions**

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

QCM 1:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} =$				
A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

➤ Réponse D :

➤ Astuce : Règle de L'HOSPITALE :  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f''}{g''}$

➤  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - (1+x)}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}$

QCM 2: ( Question 09 concours commun faculté de médecine 2022)

<p>ABCD est un carré de coté 1. On place les points E et F respectivement sur les coté [AB] et [BC] tels que <math>BE = CF = x</math> La valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :</p>				
A	B	C	D	E
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

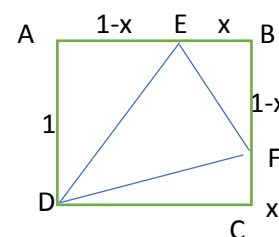
Réponse D :

On a :  $S_{EFD} = S_{ABCD} - S_{AED} - S_{BEF} - S_{CFD}$

$$= (1 \times 1) - \frac{1 \times (1-x)}{2} - \frac{x \times (1-x)}{2} - \frac{1 \times x}{2}$$

$$= 1 - \frac{1-x}{2} - \frac{x-x^2}{2} - \frac{x}{2} = \frac{2 - 1 + x - x + x^2 - x}{2}$$

$$= \frac{x^2 - x + 1}{2} = \frac{x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 1}{2} = \frac{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{2} \geq \frac{\frac{3}{4}}{2} \geq \frac{3}{8}$$



Donc pour  $x = \frac{1}{2}$  on obtient l'air minimale de EFD qui est  $\frac{3}{8}$

Remarque: On peut dresser le tableau de variation de  $S(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2}$  sur  $[0; 1]$  et on trouve que S admet une valeur minimale en  $\frac{1}{2}$

$f$  une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x \ln x}{1+x}$

Alors  $f'(x) =$

A	B	C	D	E
$\frac{1+x+\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1+2x+\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1+x+2\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1+x-\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1-x+\ln x}{(x+1)^2}$

Réponse A :

Rappel :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  ;  $(uv)' = u'v + uv'$  ;  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Soit  $x \in ]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(\ln x + x \times \frac{1}{x})(x+1) - (x \ln x \times 1)}{(x+1)^2} = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \ln x + \ln x + x + 1 - 4x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$$

QCM 4 :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)} =$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

Réponse E :

Astuce :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\alpha x)}{\ln(\beta x)} = 1$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos \alpha x)}{\ln(\cos \beta x)} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

QCM 05 :

Considérons dans  $]0; +\infty[$  l'équation suivante : (E) :  $\ln^5(x) + \ln(x) + 2e^x - \frac{1}{x} - 3 = 0$

Alors dans  $]0; +\infty[$  l'équation (E) admet

A	B	C	D
Deux solutions	Une unique solution	Trois solutions	N'admet pas de solution

Réponse B :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln^5(x) + \ln(x) + 2e^x - \frac{1}{x} - 3$

$$f'(x) = \frac{5}{x} \ln^4(x) + \frac{1}{x} + 2e^x + \frac{1}{x^2} > 0$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  donc  $0 \in f(]0; +\infty[) = ]-\infty; +\infty[$

Donc d'après TVI l'équation (E) admet une unique solution dans  $]0; +\infty[$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$

A	B	C	D	E
$n$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	1	0

Réponse B :

➤ Astuce : Règle de L'HOSPITALE :  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f''}{g''}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x + \dots + nx^{n-1}}{1} \\ &= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

QCM 7:

ABC un triangle rectangle en A tel que  $BC = 8\text{cm}$   
 Posons  $AC = x$ , et notons  $P(x)$  le périmètre du triangle ABC  
 Le périmètre maximale du triangle ABC est :

A	B	C	D	E
$8 + \sqrt{2}$	$8 - 4\sqrt{2}$	$8 + 8\sqrt{2}$	$8 + 2\sqrt{2}$	Autre réponse

Réponse C :

Soit  $x \in ]0 ; 8[$  on a :  $P(x) = AB + AC + BC$

D'après théorème de pithagore on a :  $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Donc :  $AB^2 + x^2 = 64$  donc  $AB = \sqrt{64 - x^2}$

D'où  $\forall x \in ]0 ; 8[ ; P(x) = \sqrt{64 - x^2} + x + 8$

$$P'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{64 - x^2}} + 1 = \frac{-x}{\sqrt{64 - x^2}} + 1 = \frac{\sqrt{64 - x^2} - x}{\sqrt{64 - x^2}} = \frac{64 - 2x^2}{(\sqrt{64 - x^2} + x)\sqrt{64 - x^2}}$$

$$P'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{64 - 2x^2}{(\sqrt{64 - x^2} + x)\sqrt{64 - x^2}} \geq 0 \Rightarrow 64 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 32 \Rightarrow x \leq \sqrt{32} \Rightarrow x \leq 4\sqrt{2}$$

x	0	$4\sqrt{2}$	8
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$		$8 + 8\sqrt{2}$	

Le périmètre maximale du triangle ABC est  $8 + 8\sqrt{2}$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(x)}{1 - \cos^2(x)}$$

A	B	C	D	E
$n$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n}{2}$	0

Réponse D :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(x)}{1 - \cos^2(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos^{n-1}x + \dots + \cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^{n-1}x + \dots + \cos x + 1)}{(\cos x + 1)} = \frac{1 + \dots + 1 + 1}{2} = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

**Remarque :** On peut utiliser la règle d'hôpital

QCM 09 : ( Question 17 concours commun faculté de médecine 2022)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(2x - 1) = x^2 + 3x$

Alors  $f(1) + f'(1)$  est égale à

A	B	C	D	E
$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	Autre réponse

Réponse D :

On a  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(2x - 1) = x^2 + 3x$  donc pour  $x = 1$  on trouve  $f(1) = 4$

Et on a  $f(2x - 1) = x^2 + 3x$  donc  $(2x - 1)' f'(2x - 1) = 2x + 3$

Donc  $2f'(2x - 1) = 2x + 3$ , donc pour  $x = 1$  on trouve  $2f'(1) = 5$  donc  $f'(1) = \frac{5}{2}$

D'où  $f(1) + f'(1) = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$

QCM 10 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x}} =$$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

Réponse E :

• Astuce :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \dots \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \dots \sqrt{x + \sqrt{x}}} = 0$   
 $(n + 1) \text{ fois}$   $n \text{ fois}$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x}} = 0$$

**QCM 11:** ( Question 19 concours commun faculté de médecine 2022)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$

Et (C) sa courbe dans un repère orthonormé

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

A	B	C	D
$y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{n^2-1}{2}$

Réponse A :

On a  $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$

Donc  $f(1) = 1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1} = n$

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-2}$

Donc  $f'(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

(T):  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Donc (T):  $y = \frac{n(n+1)}{2}(x - 1) + n$

Donc (T):  $y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{n(n+1)}{2} + n$

Donc (T):  $y = \frac{n(n+1)}{2}x - \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right)$

Donc (T):  $y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

**QCM 12:**

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^5 = 0$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	-1

Réponse C :

• Astuce :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

**QCM 13:**

Soit  $f$  une fonction Définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2} ; x < 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

L'ensemble de définition de  $f$  est :

A	B	C	D	E
$]2; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$[-2; +\infty[$	$]-1; 2[ \cup ]2; +\infty[$	Autre réponse

Réponse C :

Considérons la fonction  $u: x \rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$  et  $v: x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

$$x \in D_u \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ ou } x \neq -1$$

$$\text{Donc } D_u = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

➤ Donc la restriction de f sur  $]2; +\infty[$  est définie sur :

$$D_u \cap ]2; +\infty[ = ]2; +\infty[$$

$$x \in D_v \Leftrightarrow x^2 + 5 \geq 0 \text{ et } x + 2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x+2} - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } \sqrt{x+2} \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } x + 2 \neq 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } x \neq 2$$

$$\text{Donc } D_v = [-2; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

➤ Donc la restriction de f sur  $] -\infty; 2[$  est définie sur :

$$D_v \cap ] -\infty; 2[ = [-2; 2[$$

➤ Donc  $D_f = [-2; 2[ \cup ]2; +\infty[ \cup \{2\}$  , car  $f(2) = 1$

➤ D'où  $D_f = [-2; +\infty[$

QCM 14:

$g$  une fonction définit sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

Alors  $g'(x) =$

A	B	C	D	E
$\frac{-1}{(x+1)^2}$	$\frac{-1}{(x-1)^2}$	$\frac{-1}{x(x-1)^2}$	$\frac{-2}{x(x+1)^2}$	$\frac{-1}{x(x+1)^2}$

Réponse E :

Rappels :

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Soit  $x \in ]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2} = -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{\frac{1}{x}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in ]0; +\infty[ : g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) =$				
A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	-1

**Réponse D :**

**1ère méthode :** On pose  $X = \frac{1}{x}$  donc  $x = \frac{1}{X}$  ; or  $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

**2ème méthode :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \frac{1}{x} = 1$  car  $\ln(1 + X) \sim X$  au voisinage de 0

**QCM 16:**

On considère dans  $\mathbb{R}^2$  le systèmes suivant (S):  $\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

Alors l'ensemble des solutions de système (S) est :

A	B	C	D	E
$\{(e^{-2}; e^5)\}$	$\{(e^5; e^{-2})\}$	$\{(e^2; e^{-5})\}$	$\{(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})\}$	N'admet pas de solutions

**Réponse D :**

**1ère méthode :** On remplace les solutions donnés on trouve que les couples  $(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})$  sont des solutions de (S)

**2ème méthode :**

On pose  $X = \ln(x)$  et  $Y = \ln(y)$  donc  $\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = -10 \\ X + Y = 3 \end{cases}$

**Rappel :**  
 Pour déterminer deux réels x et y tels que  $x + y = S$  et  $x \times y = P$  avec S et P donnés  
 On résoudre l'équation  $t^2 - St + P = 0$

Donc on résoudre l'équation  $t^2 - 3t - 10 = 0$ ;  $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49$

$X = \frac{3 - \sqrt{49}}{2}$  et  $Y = \frac{3 + \sqrt{49}}{2}$   
 $X = -2$  et  $Y = 5$   
 $\ln x = -2$  et  $\ln y = 5$   
 $x = e^{-2}$  et  $y = e^5$  ; Donc :  $S = \{(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})\}$

**3ème méthode :**

$\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \ln y - \ln^2 y + 10 = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 y - 3 \ln y - 10 = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} (\ln y + 2)(\ln y - 5) = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = -2 \text{ ou } \ln y = 5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \text{ ou } y = e^5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ \ln x = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ \ln x = -2 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ x = e^5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ x = e^{-2} \end{cases}$

**Donc :  $S = \{(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})\}$**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x =$				
A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	2

Réponse A :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{\ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} - 1 \right] = -\infty \end{aligned}$$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$

QCM 18:

$f$ une fonction définit sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x - 1) e^{x-1}$ , alors	
A	$f''(x) = \frac{(x^2 \ln x - x^2 - 1)e^{x-1}}{x^2}$
B	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 \ln x)e^{x-1}}{x^2}$
C	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 \ln x - x^2 - 1)e^{x+1}}{x^2}$
D	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 \ln x - x^2 - 1)e^{x-1}}{x^2}$
E	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 \ln x + x^2 + 1)e^{x-1}}{x^2}$

Réponse D :

Soit  $x \in ]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \times e^{x-1} + (\ln x - 1) e^{x-1} = \frac{e^{x-1}}{x} + e^{x-1} \ln x - e^{x-1} \\ &= \frac{e^{x-1} + x e^{x-1} \ln x - x e^{x-1}}{x} = \frac{e^{x-1}(1 + x \ln x - x)}{x} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{[e^{x-1}(x \ln x - x + 1) + e^{x-1} \ln(x)]x - e^{x-1}(x \ln x - x + 1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^{x-1}(x^2 \ln x - x^2 + x + x \ln(x) - x \ln x + x - 1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^{x-1}(2x + x^2 \ln x - x^2 - 1)}{x^2}$$

La courbe de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+e^x}$  admet au point  $O(0 ; 0)$  une tangente d'équation :

A	B	C	D	E
$y = x + 1$	$y = x$	$y = 2x$	$y = -2x$	$y = x - 1$

Réponse B :

L'équation est :  $y = f'(0)(y - 0) + f(0)$

On remarque que  $f(0) = 0$  donc la réponse ne peut être A ou E donc  $y = f'(0)x$

Calculons  $a = f'(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x+e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \cdot \frac{1}{(x+e^x)} = 1 = f'(0)$$

Car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+e^x)} = 1$  ; Donc  $y = x$

QCM 20:

Soit ;  $a > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$

A	B	C	D	E
$-\frac{1}{\sqrt{a}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$-\frac{2}{\sqrt{a}}$

Réponse B :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x^2 - a^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt{x^2 - a^2})^2} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a)\sqrt{x^2 - a^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(x^2 - a^2)} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)}\sqrt{(x+a)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a)\sqrt{x^2 - a^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(x-a)(x+a)} - \frac{1}{\sqrt{x+a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(x+a)} - \frac{1}{\sqrt{x+a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(x+a)} - \frac{1}{\sqrt{x+a}} \\ &= \frac{0}{(2\sqrt{a})(2a)} - \frac{1}{\sqrt{2a}} = -\frac{1}{\sqrt{2a}} \end{aligned}$$

**Définition d'intégrale d'une fonction**

Soit F une primitive de f sur [a ; b]

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Propriétés d'intégrale :**

1)  $\int_a^a f(x) dx = 0$

2)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

3) La linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx ; \text{ avec } k \text{ dans } \mathbb{R}$$

4) Relation de CHELS

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

5) L'intégrale et l'ordre :

Si  $\forall x \in [a; b]; f(x) > 0$  alors  $\int_a^b f(x) dx > 0$

Si  $\forall x \in [a; b]; f(x) < 0$  alors  $\int_a^b f(x) dx < 0$

Si  $h < f < g$  alors  $\int_a^b h dx < \int_a^b f dx < \int_a^b g dx$

6) Si f impaire alors  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Si f paire alors  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

7)  $F(x) = \int_0^x f(t) dt \implies F'(x) = f(x)$

8)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{x-\alpha} \int_a^x f(t) dt = f'(\alpha)$

9) La valeur moyenne d'une fonction f sur

[a ; b] et le nombre :  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)$

10) Intégration par parties :

$$\int_a^b UV' dx = [UV] - \int_a^b U'V dx$$

• L'aire du domaine délimité par  $(C_f)$  et  $(C_g)$  et les droites :  $x = a$  et  $x = b$

$$A = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.A$$

➤ V le volume engendré par la rotation de  $(C_f)$  autour de (Ox) sur [a; b]

$$V = \left( \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \right) u.V$$

**Primitive d'une fonction  $r \in \mathbb{Q}/-1$**

➤ F est une primitive de f ssi F est dérivable sur I et  $\forall x \in I; F'(x) = f(x)$

➤  $\int k = kx$  ;  $\int x^r = \frac{x^{r+1}}{r+1}$  ;

➤  $\int U'(x) \times U(x)^r = \frac{U(x)^{r+1}}{r+1}$

➤  $\int \frac{a}{x^2} = -\frac{a}{x}$  ;  $\int \frac{a}{x^n} = -\frac{a}{(n-1)x^{n-1}}$

➤  $\int \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} = \sqrt{U(x)}$  ;  $\int \sqrt{x} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$

➤  $\int U'(x)e^{U(x)} = e^{U(x)}$  ;  $\int e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax}$

➤  $\int \frac{a}{x} = a \ln(|x|)$  ;  $\int \frac{k}{ax+b} = \frac{k}{a} \ln(|ax+b|)$

➤  $\int \frac{U'(x)}{U(x)} = \ln(|U(x)|)$

➤  $\int \ln x = x \ln x - x$

➤  $\int U' \ln(U) = U \ln(U) - U$

➤  $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right)}{a-b}$

➤  $\int \cos(x) = \sin(x)$  ;  $\int \sin(x) = -\cos(x)$

➤  $\int \cos(ax+b) = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$

➤  $\int \sin(ax+b) = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$

➤  $\int \tan(x) = -\ln(|\cos x|)$

➤  $\int \frac{1}{\sin(x)} = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|$

➤  $\int \frac{1}{(\cos x)^2} = \int 1 + (\tan x)^2 = \tan x$

➤  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$

➤  $\int \sqrt{x^2+a^2} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})}{2}$

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**QCM 1:** ( Question 07 concours commun faculté de médecine 2022)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ . Si $\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1} dx = \frac{1}{a}$ alors a est égal à :				
A	t	C	D	E
$\ln(e-1)$	$2e-1$	$\ln(2e+1)$	$\ln(2e-1)$	$2e+1$

**QCM 1:** ( Question 15 concours commun faculté de médecine 2022)

L'intégrale $\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}} dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

**QCM 3:** ( Question 18 concours commun faculté de médecine 2022)

Si pour tout entier naturel n , $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ .				
Alors ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) : $2I_{n+1} + (n+1)I_n$ égal à :				
A	B	C	D	E
e	$e^2$	1	$\frac{e-1}{2}$	$\frac{e+1}{2}$

**QCM 4:** ( Question 06 concours casa faculté de médecine 2019)

L'intégrale $\int_1^e (\ln x)(-x + x \ln x) dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\ln 3$	1	$-\frac{1}{2}$	0	Autre réponse

**QCM 5:**

Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction F défini sur $\mathbb{R}$ par :				
A	B	C	D	E
$\sin x - \frac{1}{3} \sin^3(x)$	$\frac{1}{3} \sin^2(x)$	$\cos x - \frac{1}{3} \sin^3(x)$	$-\frac{1}{3} \sin^2(x)$	Autre réponse

**QCM 6:**

Une primitive de la fonction  $f: x \mapsto \frac{x}{(x+2)^4}$  sur  $]-2; +\infty[$  est la fonction F par :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{2(x+2)^2}$	$\frac{1}{3}(x+2)^2$	$\frac{2}{3(x+2)^3} - \frac{1}{2(x+2)^2}$	$\ln((x+2)^4)$	Autre réponse

**QCM 7:**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , considérons la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Si la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente alors la limite de  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

**QCM 8**

L'intégrale  $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\sqrt{8} - 1$	$\sqrt{8} + 1$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8} + 1)$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 2)$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)$

**QCM 9:**

La valeur moyenne de la fonction  $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$  sur l'intervalle  $[1, 3]$  est la valeur

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}$	$\frac{\ln(3)}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{\ln(5)}{2}$	$\frac{\ln(7)}{2}$

**QCM 10:**

L'intégrale  $\int_2^e \frac{1}{x \ln(x)} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$-\ln(2)$	$\ln(\ln(2))$	$\ln 2$	1	$-\ln(\ln(2))$

**QCM 11:**

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$	$\ln\left(\frac{e^2-1}{2e}\right)$	$\ln\left(\frac{e^2+1}{e}\right)$	$\frac{e^2-1}{e}$	$\ln(\ln(2))$

**QCM 12:**

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{x^3+x+4}{x+1} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$2\ln(2) + \frac{1}{6}$	$2\ln(2) - \frac{1}{6}$	$\ln(2) - \frac{1}{6}$	$\ln(2) + \frac{1}{6}$	$2\ln(2) - \frac{1}{4}$

**QCM 13:**

L'intégrale  $\int_2^3 \frac{5x+1}{x^2+x-2} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$8\ln(2) - 3\ln(5)$	$3\ln(2) + 8\ln(5)$	$8\ln(2) + 3\ln(5)$	$8\ln(2)$	$\ln(\ln(2))$

**QCM 14:**

L'intégrale  $\int_0^2 x\sqrt{3-x} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$8\ln(2) + (1 - \sqrt{3^5})$	$\frac{4}{15}(1 + \sqrt{3^5})$	$\frac{4}{15}(1 - \sqrt{3^5})$	$\ln(2)$	$-\frac{4}{3} + \frac{4}{15}(1 - \sqrt{3^5})$

**QCM 15:**

L'intégrale  $\int_1^e \sin(\ln(x)) dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{e \sin(1)}{2}$	$\frac{-e \cos(1)}{2}$	$\frac{e \cos(1)}{2}$	$\frac{e \sin(1) - e \cos(1)}{2}$	$\frac{e \sin(1) + e \cos(1)}{2}$

**QCM 16:**

Le plan est apporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = 3 \text{ cm}$  et  $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$   
Soit  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$  et  $(C_f)$  sa courbe dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   
L'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C_f)$ , la droite  $(ox)$  et les droites  $x=1$  et  $x=2$

A	B	C	D	E
$6 \ln\left(\frac{4}{3}\right) \text{ cm}^2$	$6 \ln\left(\frac{5}{6}\right) \text{ cm}^2$	$6 \ln\left(\frac{3}{4}\right) \text{ cm}^2$	$12 \ln\left(\frac{4}{3}\right) \text{ cm}^2$	$\ln\left(\frac{4}{3}\right) \text{ cm}^2$

**QCM 17:**

Le plan est apporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$   
Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = \sin(x)$  et  $(Cg)$  sa courbe dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   
L'aire du domaine délimité par la courbe de  $g$  et les droites d'équations :  
 $x = \frac{\pi}{2}$  et  $x = -\frac{\pi}{2}$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2} \text{ cm}^2$	$2 \text{ cm}^2$	$6 \text{ cm}^2$	$12 \text{ cm}^2$	$3 \text{ cm}^2$

**QCM 18:**

L'intégrale  $\int_4^5 \frac{1}{x^2-9} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{5} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{4} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{6} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{6} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$	Autre réponse

**QCM 19:**

L'intégrale  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\ln(2)$	1	-1	$\ln(5)$	$\ln(3)$

**QCM 20** Concours commun d'accès à la faculté de médecine 2021 question 12

Si  $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$  et  $f'(2) - f'(1) = 2$  alors  $f'(2) + f'(1)$  égal à :

A	B	C	D	E
4	6	8	10	12

**QCM 1:** ( Question 07 concours commun faculté de médecine 2022)

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Si  $\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1} dx = \frac{1}{a}$  alors  $a$  est égal à :

A	t	C	D	E
$\ln(e-1)$	$2e-1$	$\ln(2e+1)$	$\ln(2e-1)$	$2e+1$

Réponse D :

$$\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1} dx = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{ae^{ax}}{e^{ax}+1} dx = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{ae^{ax}}{e^{ax}+1} dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(e^{ax}+1)'}{e^{ax}+1} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow [\ln(|e^{ax}+1|)]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \ln(e^a+1) - \ln(2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^a+1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^a+1}{2} = e \Leftrightarrow e^a+1 = 2e$$

$$\Leftrightarrow e^a = 2e - 1$$

$$\Leftrightarrow a = \ln(2e - 1)$$

**QCM 1:** ( Question 15 concours commun faculté de médecine 2022)

L'intégrale  $\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

Réponse C :

$$\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{3x^2+6}{2\sqrt{x^3+6x+4}} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{(x^3+6x+4)'}{2\sqrt{x^3+6x+4}} dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[ \sqrt{x^3+6x+4} \right]_0^3 = \frac{2}{3} (\sqrt{27+18+4} - \sqrt{4})$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{49} - 2) = \frac{2}{3} (7 - 2)$$

$$= \frac{10}{3}$$

Si pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ .

Alors ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) :  $2I_{n+1} + (n+1)I_n$  égal à :

A	B	C	D	E
$e$	$e^2$	1	$\frac{e-1}{2}$	$\frac{e+1}{2}$

**Réponse B :**

On a  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$  donc  $I_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx$

Posons  $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = x \end{cases}$  alors  $\begin{cases} u'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Il s'ensuit donc :  $I_{n+1} = \left[ \frac{x^2}{2} (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n \times \frac{x^2}{2} dx$

Donc  $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{n+1}{2} \int_1^e x(\ln x)^n dx$  donc  $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

Donc  $2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n$  donc  $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$

**QCM 4 :** ( Question 06 concours casa faculté de médecine 2019)

L'intégrale  $\int_1^e (\ln x)(-x + x \ln x) dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\ln 3$	1	$-\frac{1}{2}$	0	Autre réponse

**Réponse C :**

Une primitive de la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  sur  $]0; +\infty[$  est  $x \mapsto x \ln(x) - x$  donc :

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln(x)(-x + x \ln x) dx &= \int_1^e (x \ln(x) - x)'(-x + x \ln x) dx \\ &= \frac{1}{2} [(x \ln(x) - x)^2]_1^e = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

**QCM 5 :**

Une primitive de la fonction  $x \mapsto \cos^3(x)$  sur  $\mathbb{R}$  est la fonction F défini sur  $\mathbb{R}$  par :

A	B	C	D	E
$\sin x - \frac{1}{3} \sin^3(x)$	$\frac{1}{3} \sin^2(x)$	$\cos x - \frac{1}{3} \sin^3(x)$	$-\frac{1}{3} \sin^2(x)$	Autre réponse

**Réponse A**

$$\begin{aligned} f(x) = \cos^3(x) &= \cos(x)\cos^2(x) \\ &= \cos(x)(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x \end{aligned}$$

Une primitive de  $u'u^2$  est de la forme  $\frac{1}{3}u^3$ .

D'où  $F(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3(x) + C$ , avec  $C \in \mathbb{R}$

Une primitive de la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{(x+2)^4}$ sur $]-2; +\infty[$ est la fonction F par :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{2(x+2)^2}$	$\frac{1}{3}(x+2)^2$	$\frac{2}{3(x+2)^3} - \frac{1}{2(x+2)^2}$	$\ln((x+2)^4)$	Autre réponse
<b>Réponse C</b>				

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{x+2}{(x+2)^4} - \frac{2}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{1}{(x+2)^3} - \frac{2}{(x+2)^4} \\
 &= (x+2)^{-3} - 2(x+2)^{-4}
 \end{aligned}$$

Une primitive de  $u'u^n$  est de la forme  $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$

$$F(x) = \frac{1}{-2}(x+2)^{-2} - 2 \times \frac{1}{-3}(x+2)^{-3} + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R},$$

$$F(x) = -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{2}{3(x+2)^3} + c, \text{ avec } C \in \mathbb{R},$$

QCM 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ , considérons la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que :				
$I_n = \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$				
Si la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :				
A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse
<b>Réponse B</b>				

Soit  $x \in [1; 2]$  et  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a : } x^2 \geq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$$\text{Donc } x^2 + 1 \geq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{2^n} dx$$

$$\text{Donc : } 0 \leq \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \leq \frac{1}{2^n}(2-1)$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

Donc d'après théorème de gendarme on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

**QCM 8:**

L'intégrale $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\sqrt{8} - 1$	$\sqrt{8} + 1$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8} + 1)$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 2)$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)$

Réponse E

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x+1} dx &= \int_0^1 (x+1)' \sqrt{x+1} dx \\ &= \int_0^1 (x+1)' (x+1)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[ \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) \end{aligned}$$

**QCM 9:**

La valeur moyenne de la fonction $x \rightarrow \frac{2x}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[1, 3]$ est la valeur				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}$	$\frac{\ln(3)}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{\ln(5)}{2}$	$\frac{\ln(7)}{2}$

Réponse D :

$$\mu = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_1^3 = \frac{\ln(5)}{2}$$

**QCM 10:**

L'intégrale $\int_2^e \frac{1}{x \ln(x)} dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$-\ln(2)$	$\ln(\ln(2))$	$\ln 2$	1	$-\ln(\ln(2))$

Réponse E :

$$\begin{aligned} \int_2^e \frac{1}{x \ln(x)} dx &= \int_2^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)} dx = \int_2^e (\ln x)' \times \frac{1}{\ln(x)} dx \\ &= \int_2^e \frac{(\ln x)'}{\ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_2^e \\ &= \ln(\ln(e)) - \ln(\ln(2)) = -\ln(\ln(2)) \end{aligned}$$

**QCM 11:**

L'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$	$\ln\left(\frac{e^2-1}{2e}\right)$	$\ln\left(\frac{e^2+1}{e}\right)$	$\frac{e^2-1}{e}$	$\ln(\ln(2))$

Réponse A :

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x(e^x - \frac{1}{e^x})}{e^x(e^x + \frac{1}{e^x})} dx = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} dx = [\ln(e^x + e^{-x})]_0^1$$

$$= \ln(e^1 + e^{-1}) - \ln(1 + 1) = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right)$$

QCM 12 :

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{x^3+x+4}{x+1} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$2\ln(2) + \frac{1}{6}$	$2\ln(2) - \frac{1}{6}$	$\ln(2) - \frac{1}{6}$	$\ln(2) + \frac{1}{6}$	$2\ln(2) - \frac{1}{4}$

Réponse B :

On pose :  $f(x) = \frac{x^3 + x + 4}{x + 1}$  ; sur  $I = [0; 1]$

$$\begin{array}{r} x^3 + x + 4 \\ x^3 + x^2 \\ \hline 0 - x^2 + x + 4 \\ -x^2 - x \\ \hline 0 + 2x + 4 \\ 2x + 2 \\ \hline 0 + 2 \end{array}$$

Donc :  $x^3 + x + 4 = (x + 1)(x^2 - x + 2) + 2$

$$\text{Donc : } \frac{x^3 + x + 4}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 2)}{x + 1} + \frac{2}{x + 1}$$

$$= x^2 - x + 2 + \frac{2}{x + 1}$$

Donc une primitive est :  $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln(x + 1)$

$$A = \int_0^1 \frac{x^3 + x + 4}{x + 1} dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln(x + 1) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\ln(2) = -\frac{1}{6} + 2\ln(2)$$

QCM 13 :

L'intégrale  $\int_2^3 \frac{5x+1}{x^2+x-2} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$8\ln(2) - 3\ln(5)$	$3\ln(2) + 8\ln(5)$	$8\ln(2) + 3\ln(5)$	$8\ln(2)$	$\ln(\ln(2))$

**Réponse C :**

On pose  $g(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}$  sur  $I = [2; 3]$

Donc il existe deux réels a et b tel que :  $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

Cherchons a et b :

$$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$$

Et on a :  $g(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$  Donc :  $\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases}$

Donc :  $\begin{cases} 3b=9 \\ 2a-b=1 \end{cases} ; 2L_1 - L_2$  Donc :  $\begin{cases} b=3 \\ 2a-3=1 \end{cases} ;$

Donc :  $\begin{cases} b=3 \\ a=2 \end{cases} ;$  Donc :  $g(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$

Donc une primitive de g est:  $G(x) = 2 \ln(x-1) + 3 \ln(x+2)$

$$B = \int_2^3 \frac{5x+1}{x^2+x-2} dx$$

$$= [2 \ln(x-1) + 3 \ln(x+2)]_2^3$$

$$= 2 \ln(2) + 3 \ln(5) - 0 + 3 \ln(4)$$

$$= 8 \ln(2) + 3 \ln(5)$$

**QCM 14 :**

L'intégrale  $\int_0^2 x\sqrt{3-x} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$8 \ln(2) + (1 - \sqrt{3^5})$	$\frac{4}{15} (1 + \sqrt{3^5})$	$\frac{4}{15} (1 - \sqrt{3^5})$	$\ln(2)$	$-\frac{4}{3} + \frac{4}{15} (1 - \sqrt{3^5})$

**Réponse E :**

Calculons l'intégrale  $G = \int_0^2 x\sqrt{3-x} dx$

Posons  $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sqrt{3-x} = (3-x)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$  alors  $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{2}{3} (3-x)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

Il s'ensuit donc :

$$G = \left[ -\frac{2}{3} x(3-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 + \frac{2}{3} \int_0^2 (3-x)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \left[ (3-x)^{\frac{5}{2}} \right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{4}{15} (1 - (3)^{\frac{5}{2}})$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{4}{15} (1 - \sqrt{3^5})$$

L'intégrale $\int_1^e \sin(\ln(x)) dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{e \sin(1)}{2}$	$\frac{-e \cos(1)}{2}$	$\frac{e \cos(1)}{2}$	$\frac{e \sin(1) - e \cos(1)}{2}$	$\frac{e \sin(1) + e \cos(1)}{2}$

Réponse D :

Calculons l'intégrale  $H = \int_1^e \sin(\ln(x)) dx$

Posons  $\begin{cases} u(x) = \sin(\ln(x)) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$  alors  $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \cos(\ln(x)) \\ v(x) = x \end{cases}$

$$H = [x \sin(\ln(x))]_1^e - \int_1^e \cos(\ln(x)) dx$$

$$H = e \sin(1) - \int_1^e \cos(\ln(x)) dx$$

Posons  $\begin{cases} u(x) = \cos(\ln(x)) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$  alors  $\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{x} \sin(\ln(x)) \\ v(x) = x \end{cases}$

$$H = e \sin(1) - \left( [x \cos(\ln(x))]_1^e + \int_1^e \sin(\ln(x)) dx \right)$$

$$H = e \sin(1) - e \cos(1) - H$$

$$\text{Donc : } 2H = e \sin(1) - e \cos(1)$$

$$\text{Donc : } H = \frac{e \sin(1) - e \cos(1)}{2}$$

QCM 16 :

Le plan est apporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\ \vec{i}\  = 3 \text{ cm}$ et $\ \vec{j}\  = 2 \text{ cm}$ . Soit $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ et $(C_f)$ sa courbe dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Alors l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C_f)$ , la droite $(ox)$ et les droites $x=1$ et $x=2$				
A	B	C	D	E
$6 \ln\left(\frac{4}{3}\right) \text{ cm}^2$	$6 \ln\left(\frac{5}{6}\right) \text{ cm}^2$	$6 \ln\left(\frac{3}{4}\right) \text{ cm}^2$	$12 \ln\left(\frac{4}{3}\right) \text{ cm}^2$	$\ln\left(\frac{4}{3}\right) \text{ cm}^2$

Réponse A :

$$\text{On a } (\forall x \in ]0, +\infty[) : f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} > 0$$

$$A = \int_1^2 |f(x)| dx \times u.a = \int_1^2 f(x) dx \times u.a$$

$$= \int_1^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$= [\ln|x| - \ln|x+1|]_1^2 \times 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$$

$$= \left( \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln(2) \right) \times 6 \text{ cm}^2 = 6 \ln\left(\frac{4}{3}\right) \text{ cm}^2$$

Le plan est apporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ;  $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$   
 Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = \sin(x)$  et  $(Cg)$  sa courbe  
 dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Alors l'aire du domaine délimité par la courbe  
 de  $g$  et les droites d'équations :  $x = \frac{\pi}{2}$  et  $x = -\frac{\pi}{2}$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2} \text{ cm}^2$	$2 \text{ cm}^2$	$6 \text{ cm}^2$	$12 \text{ cm}^2$	$3 \text{ cm}^2$

Réponse B :

On a  $(: \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]) ; \sin x \geq 0$  et  $(: \forall x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]) ; \sin x \leq 0$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g(x)| \, dx \times u.a = \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\sin x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \right) \times u.a$$

$$= \left( [\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \text{ cm}^2 = ((1 - 0) - (0 - 1)) \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2$$

QCM 18:

L'intégrale  $\int_4^5 \frac{1}{x^2-9} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{5} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{4} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{6} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{6} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$	Autre réponse

Réponse C :

Astuce :  $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right)}{a-b}$

$$\int_4^5 \frac{1}{x^2-9} dx = \int_4^5 \frac{1}{(x-3)(x+3)} dx$$

$$= \left[ \frac{\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)}{3+3} \right]_4^5$$

$$= \frac{1}{6} \left( \ln\left(\frac{2}{8}\right) - \ln\left(\frac{1}{7}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left( \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(7) \right)$$

$$= \frac{1}{6} (-\ln(4) + \ln(7))$$

$$= \frac{1}{6} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

L'intégrale $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\ln(2)$	1	-1	$\ln(3)$	$\ln(5)$

**Réponse D :**

**Astuce :**  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(|x + \sqrt{x^2+a^2}|)$  ( Changement de variable  $x = a \tan(t)$  )

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+3^2}} dx = \left[ \ln(x + \sqrt{x^2+9}) \right]_0^4 = (\ln(9) - \ln(3)) = \ln\left(\frac{9}{3}\right) = \ln(3)$$

**QCM 20**

**Concours commun d'accès à la faculté de médecine 2021 question 12**

Si $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$ et $f'(2) - f'(1) = 2$ alors $f'(2) + f'(1)$ égal à :				
A	B	C	D	E
4	6	8	10	12

**Réponse C :**

**Rappel :**  $\int_1^2 (g(x))' g(x)dx = \left[ \frac{1}{2} (g(x))^2 \right]_1^2$  donc pour  $g(x) = f'(x)$  on a:

$$\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_1^2 (f'(x))' f'(x)dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{1}{2} (f'(x))^2 \right]_1^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( (f'(2))^2 - (f'(1))^2 \right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( (f'(2) + f'(1))(f'(2) - f'(1)) \right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( (f'(2) + f'(1)) \times 2 \right) = 8 \quad \text{car } f'(2) - f'(1) = 2$$

$$\Leftrightarrow f'(2) + f'(1) = 8$$

**Fin de sujet 03**

**L'ensemble  $\mathbb{C}$  et la forme algébrique**

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$$

$$\triangleright z = a + ib \Leftrightarrow \bar{z} = a - ib;$$

**Propriété de Conjugué d'un complexe**

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad ; \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}; \quad z\bar{z} = a^2 + b^2 \quad ; \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\triangleright \bar{z} + z = 2\text{Re}(z) \quad ; \quad z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$$

$$\triangleright z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \quad ; \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

**Module d'un nombre complexe :  $|z|$**

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\triangleright |z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\triangleright |z \times z'| = |z| \times |z'| \quad ; \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\triangleright |z^n| = |z|^n \quad ; \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$\theta$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0
$\cos(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\sin(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(\theta)$		$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

$$\triangleright \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad ; \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\triangleright \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

**Résolution d'équations du second degré**

Soit l'équation (E) :  $az^2 + bz + c = 0$

$$\triangleright \text{Si } \Delta < 0 \text{ alors : } z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\triangleright \text{Si } \Delta > 0 \text{ alors : } z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\triangleright \text{Si } \Delta = 0 \text{ alors : } z = \frac{-b}{2a}$$

$$\triangleright az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\bullet z^2 = U^2 \Leftrightarrow z = \pm U$$

$$\bullet z^2 = a \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{a}$$

$$\bullet z^2 = -a \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{a}$$

$$\bullet z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1; \quad z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i$$

$$\bullet z^2 = i \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

$$\bullet z^2 = -i \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

$$\bullet z^3 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{ou } z = \bar{j} = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\bullet 1 + j + \bar{j} = 0 \text{ et } j^3 = 1$$

**Argument d'un nombre complexe**

$$\bullet \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$\bullet \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

$$\bullet \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$\bullet \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$$

$$\bullet \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$\bullet \arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$$

**Forme trigonométrique et expo**

$$z = a + ib = |z| e^{i\theta}$$

$$= |z| (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = [|z|; \theta]$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

**Opérations sur Forme trigonométrique**

$$\bullet [r; \theta][r'; \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$$

$$\bullet \frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[ \frac{r}{r'}; \theta - \theta' \right] \quad ; \quad \frac{1}{[r; \theta]} = \left[ \frac{1}{r}; -\theta \right]$$

$$\overline{[r; \theta]} = [r; -\theta] \quad ; \quad -[r; \theta] = [r'; \pi + \theta]$$

$$([r; \theta])^n = [r^n; n\theta]$$

**Notation exponentielle  $e^{i\theta}$**

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

$$\bullet e^{i0} = 1; \quad e^{i\pi} = -1; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i; \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

**Opérations sur  $e^{i\theta}$**

$$\triangleright |e^{i\theta}| = 1 \quad ; \quad \arg(e^{i\theta}) \equiv \theta [2\pi]$$

$$\triangleright \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad ; \quad -e^{i\theta} = e^{i(\theta + \pi)}$$

$$\triangleright \forall \theta \in \mathbb{R}; \quad \forall n \in \mathbb{Z} : (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$( \cos(\theta) + i\sin(\theta) )^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\triangleright e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$$

$$\triangleright e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta)$$

$$\triangleright 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\triangleright 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\triangleright e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$\triangleright e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$\triangleright \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = -i \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Astuce :  $a \in \mathbb{R}_+^*$

- $a = [a; 0]$  ;  $-a = [a; \pi]$
- $ai = [a; \frac{\pi}{2}]$  ;  $-ai = [a; -\frac{\pi}{2}]$
- $a \pm ai\sqrt{3} = [2a; \pm \frac{\pi}{3}]$
- $-a \pm ai\sqrt{3} = [2a; \pm \frac{2\pi}{3}]$
- $a\sqrt{3} \pm ai = [2a; \pm \frac{\pi}{6}]$
- $-a\sqrt{3} \pm ai = [2a; \pm \frac{5\pi}{6}]$
- $a \pm ai = [\sqrt{2}a; \pm \frac{\pi}{4}]$  ;  $-a \pm ai = [\sqrt{2}a; \pm \frac{3\pi}{4}]$

### La géométrie et les nombres complexes

L'affixe de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :  $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

•  $A(z_A)$  et  $B(z_B)$  alors :  $AB = |z_B - z_A|$

L'affixe de I le milieu du segment [AB] est

$z_I$  tel que :  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

- A, B, C sont alignés  $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$
- A, B, C et D sont cocycliques ( appartenant au même cercle)  $\Leftrightarrow \left( \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \right) \in \mathbb{R}$

•  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

•  $(AB) // (DC) \Leftrightarrow \frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

•  $(AB) \perp (DC) \Leftrightarrow \frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

• Soit G le barycentre des point pondérés

$(A; \alpha)$  ;  $(B; \beta)$  et  $(C; \gamma)$  :  $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

• Si G est le centre de gravité de triangle

ABC alors :  $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

➤  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta] \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$

➤  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib \Leftrightarrow ABC$  est rectangle en A

➤  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta] \Leftrightarrow$  le triangle ABC est isocèle en A

➤  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \pm \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow$  le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

\*  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \pm \frac{\pi}{3}]$  alors le triangle ABC est équilatérale

L'ensemble des points M(z)

- l'ensemble des points M d'affixe z tel que :  $|z - z_A| = r$  est un cercle de centre  $A(z_A)$  et de rayon r ;  $r > 0$
- L'ensemble des points M d'affixe z tel que :  $|z - z_A| \leq r$  est l'intérieur du cercle de centre  $A(z_A)$  et de rayon r
- L'ensemble des points M d'affixe z tel que :  $|z - z_A| \geq r$  est l'extérieur du cercle de centre  $A(z_A)$  et de rayon r
- l'ensemble des points M d'affixe z tel que :  $\frac{z - z_A}{z - z_B} = ib$  est un cercle de diamètre [AB] privé de A et B
- l'ensemble des points M d'affixe z tel que  $\left| \frac{z - z_A}{z - z_B} \right| = R$  est un cercle de diamètre [EF] tel que :  $z_E = \frac{z_A + R z_B}{1 + R}$  et  $z_F = \frac{z_A - R z_B}{1 - R}$
- l'ensemble des points M d'affixe z tel que :  $|z - z_A| = |z - z_B|$  est la droite (D) le médiatrice du segment [AB]

Translation  $T_{\vec{u}}$  de vecteur  $\vec{u}(z_{\vec{u}})$

Soit M'(z') l'image de point M(z) par

$$T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$$

Homothétie de centre  $\Omega(\omega)$  et de rapport k

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

Rotation R de centre  $\Omega(\omega)$  et d'angle  $\theta$

Soit M'(z') l'image de M(z) par la Rotation R

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

**Astuce :**

f une transformation tel que  $z' = az + b$

➤ Si a = 1 alors f est la translation de vecteur  $\vec{u}(b)$

➤ Si a  $\neq$  1 alors f est l'homothétie de rapport a et de centre  $\Omega(\frac{b}{1-a})$

➤ Si a  $\neq$  1 et  $|a| = 1$  alors la transformation f est la rotation de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$  est d'angle  $\theta = \arg(a)$

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**Q1\_ ( Question 01 concours commun faculté de médecine 2022)**

Dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $\frac{2z-1}{z+1} = z$  est :

A	B	C	D	E
$\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$	$\{1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$	$\left\{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

**Q2\_ ( Question 02 concours commun faculté de médecine 2022)**

Si  $z = e^{ix} - e^{-ix}$  avec  $x \in ]0; \pi[$ , alors  $|z|$  est égale à :

A	B	C	D	E
2	$2 \cos x$	$2 \cos \frac{x}{2}$	$2 \sin x$	$2 \sin \frac{x}{2}$

**Q3**

On considère le nombre complexe suivant  $z = \frac{1}{1+i \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

Le module de  $z$  est :

A	B	C	D	E
$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$	Autre réponse

**Q4\_ ( Question 05 concours commun faculté de médecine 2022)**

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $\arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$  et  $|z| = \sqrt{2}$  alors la partie imaginaires de  $z^3$  est :

A	B	C	D	E
0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

**Q5\_ ( Question 08 concours commun faculté de médecine 2022)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soit  $z$  un nombre complexe et  $\Omega, M$  et  $M'$  les points d'affixes respectivement  $-\frac{\sqrt{3}}{3}, z$  et  $z'$  tel que :  $z' = (1 + i\sqrt{3})z + i$ , alors une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'})$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

**Q6**

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$  est :

A	B	C	D
le cercle de centre $A(-3)$ et de rayon 1	le cercle de centre $A(-i)$ et de rayon 1	la droite d'équation $6x - 2y - 15 = 0$	la droite d'équation $6x - 8y + 15 = 0$

**Q7** ( Question 10 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $|z| - z = 3 - i\sqrt{3}$  alors  $|z|$  est égale à :

A	B	C	D	E
0	2	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$

**Q8** ( Question 11 concours commun faculté de médecine 2022)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $-i$  et  $i$

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $\left| \frac{iz-1}{\bar{z}+i} \right| = 1$  est :

A	B	C	D	E
La médiatrice du $[AB]$	La droite $(AB)$	La droite $(AB)$ privé du point B	Le cercle de diamètre $[AB]$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

**Q9** ( Question 04 concours commun faculté de médecine casa 2019)

Soit  $Z$  un nombre complexe tel que :  $Z = \frac{(1+i)^{21}(1+i\sqrt{3})^{19}}{(1-i)^9}$

Un argument de  $Z$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{2\pi}{3}$

**10** ( Question 11 concours commun faculté de médecine casa 2019)

Soit  $z$  un nombre complexe de module 1 . Le nombre  $|\sqrt{2} + z|^2 + |\sqrt{2} - \bar{z}|^2$  est égale à :

A	B	C	D	E
$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	6	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

**Q11**

On pose  $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  . Alors  $j^{2023}$  est égale à :

A	B	C	D	E
$j$	$-j$	$i$	$-i$	1

**Q12**

Dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $3iz - \bar{z} = 8i$  est :

A	B	C	D	E
$\{3 - 2i\}$	$\{3 + i\}$	$\{3 - i\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

**Q13**

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|iz - 3| = 1$  est :

A	B	C	D
le cercle de centre $A(-3)$ et de rayon 1	le cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 1	la droite d'équation $6x + 8y + 15 = 0$	la droite d'équation $6x - 8y + 15 = 0$

**Q14**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soient les points  $A(a)$ ;  $B(b)$  et  $C(c)$  tel que :  $a = 2$ ;  $b = -1 + i$  et  $c = 3 + 3i$

La nature du triangle ABC est :

A	le triangle ABC est équilatéral
B	le triangle ABC rectangle en A mais non isocèle en A
C	le triangle ABC est isocèle et rectangle en A
D	le triangle ABC est isocèle en A mais n'est pas rectangle en A
E	le triangle ABC est isocèle et rectangle en B

**Q15**

Soit  $u$  un nombre complexe tel que  $u \notin \mathbb{R}$  et  $(\forall z \in \mathbb{C}) : |1 + uz| = |1 + \bar{u}z|$ , alors :

A	B	C	D	E
$z = 1$	$z = -\bar{z}$	$z = -i\bar{z}$	$z = i\bar{z}$	$z = \bar{z}$

**Q16**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

On considère le point  $M$  d'affixe le nombre complexe  $z$

et  $M'$  le point d'affixe  $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

Les valeurs du nombre complexe  $z$  pour que les points  $M$  et  $M'$  soient confondues est :

A	B	C	D	E
$\{i; -i\}$	$\{1; i\}$	$\{-1; 1\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

**Q17**

On considère le nombre complexe suivant :  $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{8}}$ . Un argument de  $z$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	Autre réponse

**Q18**

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$  est :

A	Le cercle (C) de centre 0 et de rayon 2 privé du point A d'affixe -1
B	Le cercle (C) de centre 0 et de rayon 3 privé du point A d'affixe -1
C	la droite (D) la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(i)$ et $B(-i)$
D	la droite (D) la médiatrice du segment $[AB]$ . avec $A(2i)$ et $B(-i)$
E	Le cercle (C) de centre 0 et de rayon 1 privé du point A d'affixe -1

**Q19**

Soit le nombre complexe suivant  $z = 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ . alors un argument de  $z$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$

**Q20**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

la nature de la transformation  $f$  qui associe chaque point  $M(z)$  par son image  $M'(z')$  tel que  $f(z) = z' = iz + 2 - i$  est :

A	L'homothétie de rapport 4 est de centre $\Omega$ d'affixe $i$
B	La rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
C	La rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
D	La rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
E	la translation de vecteur $\vec{u}(-3i)$

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1 ( Question 01 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $\frac{2z-1}{z+1} = z$  est :

A	B	C	D	E
$\{-1; \frac{1}{2}\}$	$\{1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$	$\left\{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Réponse C :

$$\frac{2z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow 2z-1 = z^2+z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Q2 ( Question 02 concours commun faculté de médecine 2022)

Si  $z = e^{ix} - e^{-ix}$  avec  $x \in ]0; \pi[$ , alors  $|z|$  est égale à :

A	B	C	D	E
2	$2\cos x$	$2\cos \frac{x}{2}$	$2\sin x$	$2\sin \frac{x}{2}$

Réponse D :

$$\text{On a } z = e^{ix} - e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x) - (\cos(x) + i\sin(x))$$

$$= -2i \sin(x)$$

Et on a  $x \in ]0; \pi[$  alors  $\sin(x) \geq 0$

D'où  $|z| = 2 \sin(x)$

On considère le nombre complexe suivant  $z = \frac{1}{1+i \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

Le module de z est :

A	B	C	D	E
$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$	Autre réponse

Réponse A :

$$z = \frac{1}{1+i \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{1+i \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}} = \frac{1}{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{e^{i\frac{\pi}{8}}}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

Et comme  $\cos\frac{\pi}{8} > 0$  donc le module de z est  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

**Q4\_ ( Question 05 concours commun faculté de médecine 2022)**

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $\arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$  et  $|z| = \sqrt{2}$  alors la partie imaginaires de  $z^3$  est :

A	B	C	D	E
0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

Réponse A :

$$\arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi] \Rightarrow \arg(i) + \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{4\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

Et on a  $|z| = \sqrt{2}$  donc  $z = \sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$\text{Donc } z^3 = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3$$

$$\text{Donc } z^3 = 2\sqrt{2} e^{i2\pi} = 2\sqrt{2} e^0 = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Donc } \text{Im}(z^3) = 0$$

## Q5 ( Question 08 concours commun faculté de médecine 2022)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soit  $z$  un nombre complexe et  $\Omega, M$  et  $M'$  les points d'affixes respectivement  $-\frac{\sqrt{3}}{3}, z$  et  $z'$  tel que :  $z' = (1 + i\sqrt{3})z + i$ , alors une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'})$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Réponse B :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) &\equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{(1 + i\sqrt{3})z + i + \frac{\sqrt{3}}{3}}{z + \frac{\sqrt{3}}{3}}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{(1 + i\sqrt{3})\left(z + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}(1 + i\sqrt{3}) + i + \frac{\sqrt{3}}{3}}{z + \frac{\sqrt{3}}{3}}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(1 + i\sqrt{3} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3i}{3} + i + \frac{\sqrt{3}}{3}}{z + \frac{\sqrt{3}}{3}}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(1 + i\sqrt{3})[2\pi] \equiv \arg\left(2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{\pi}{3}\right)[2\pi] \end{aligned}$$

## Q6

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$  est :

A	B	C	D
le cercle de centre $A(-3)$ et de rayon 1	le cercle de centre $A(-i)$ et de rayon 1	la droite d'équation $6x - 2y - 15 = 0$	la droite d'équation $6x - 8y + 15 = 0$

Réponse C :

$$|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5| \Leftrightarrow |z - (3 + i)| = |z - 5|$$

$$\text{Soit encore } |z - (3 + i)|^2 = |z - 5|^2$$

On pose  $z = x + iy$ , alors l'équation s'écrit :

$$|x + iy - (3 + i)|^2 = |x + iy - 5|^2 \Leftrightarrow |x - 3 + i(y - 1)|^2 = |x - 5 + iy|^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - 5)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 10x - 6x + 9 - 2y + 1 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2y - 15 = 0$$

## Q7 ( Question 10 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans $\mathbb{C}$ , si $ z  - z = 3 - i\sqrt{3}$ alors $ z $ est égale à :				
A	B	C	D	E
0	2	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$

Réponse B :

Soit  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ 

$$|z| - z = 3 - i\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 3 - i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} = 3 + x \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3 = 3^2 + 6x + x^2 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 9 = 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = -6 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow z = -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = 2$$

## Q8 ( Question 11 concours commun faculté de médecine 2022)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct Soient A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $i$ L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left  \frac{iz-1}{z+i} \right  = 1$ est :				
A	B	C	D	E
La médiatrice du $[AB]$	La droite $(AB)$	La droite $(AB)$ privé du point B	Le cercle de diamètre $[AB]$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Réponse A :

$$\left| \frac{iz-1}{z+i} \right| = 1 \Rightarrow |iz-1| = |z+i|$$

$$\Rightarrow |iz+i^2| = |\overline{z-i}|$$

$$\Rightarrow |i||z+i| = |z-i|$$

$$\Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Rightarrow MA = MB$$

Donc L'ensemble des points M est La médiatrice du segment  $[AB]$ 

## Q9 ( Question 04 concours commun faculté de médecine casa 2019)

Soit Z un nombre complexe tel que : $Z = \frac{(1+i)^{21}(1+i\sqrt{3})^{19}}{(1-i)^9}$ Un argument de Z est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{2\pi}{3}$

Réponse B :

$$\arg(Z) \equiv 21 \arg(1+i) + 19 \arg(1+i\sqrt{3}) - 9 \arg(1-i) [2\pi]$$

$$\begin{aligned} &\equiv 21\frac{\pi}{4} + 19\frac{\pi}{3} - 9\left(-\frac{\pi}{4}\right) [2\pi] \\ &\equiv \frac{16\pi + 5\pi}{4} + \frac{18\pi + \pi}{3} + \frac{8\pi + \pi}{4} [2\pi] \\ &\equiv \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ &\equiv \frac{22\pi}{12} [2\pi] \\ &\equiv \frac{11\pi}{6} [2\pi] \end{aligned}$$

**10\_ ( Question 11 concours commun faculté de médecine casa 2019)**

Soit $z$ un nombre complexe de module 1 . Le nombre $ \sqrt{2} + z ^2 +  \sqrt{2} - \bar{z} ^2$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	6	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

**Réponse C :**

Remarque : On peut éliminer les réponse négative B et D

On a  $z$  est un nombre complexe tel que  $|z| = 1$ 

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} + z|^2 + |\sqrt{2} - \bar{z}|^2 &= (\sqrt{2} + z)(\overline{\sqrt{2} + z}) + (\sqrt{2} - \bar{z})(\overline{\sqrt{2} - \bar{z}}) \\ &= (\sqrt{2} + z)(\sqrt{2} + \bar{z}) + (\sqrt{2} - \bar{z})(\sqrt{2} - z) \\ &= 2 + \sqrt{2}\bar{z} + \sqrt{2}z + z\bar{z} + 2 - \sqrt{2}z - \sqrt{2}\bar{z} + z\bar{z} \\ &= 4 + 2z\bar{z} = 6 \quad (\text{Car } z\bar{z} = |z|^2 = 1) \end{aligned}$$

**Q11**

On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Alors $j^{2023}$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$j$	$-j$	$i$	$-i$	1

**Réponse A :**

$$j^{2023} = j^{2022+1} = (j^3)^{337} \times j = (1)^{337} \times j = j \quad \text{car } j^3 = 1$$

**Q12**

Dans $\mathbb{C}$ , l'ensemble des solutions de l'équation $3iz - \bar{z} = 8i$ est :				
A	B	C	D	E
$\{3 - 2i\}$	$\{3 + i\}$	$\{3 - i\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

**Réponse C :**

**1<sup>ère</sup> méthode :**

On remplace les solutions données on trouve que  $3 - i$  est solution

**2<sup>ème</sup> méthode :**

$z$  un élément de  $\mathbb{C}$ , on pose  $z = x + iy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
 3iz - \bar{z} = 8i &\Leftrightarrow 3i(x + iy) - x + iy = 8i \\
 &\Leftrightarrow 3ix - 3y - x + iy - 8i = 0 \\
 &\Leftrightarrow -3y - x + (3x + y - 8)i = 0 \\
 &\Leftrightarrow -3y - x = 0 \text{ et } (3x + y - 8) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } 3 \times -3y + y - 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } (-8y - 8) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } y = -1 \\
 &\Leftrightarrow x = 3 \text{ et } y = -1 \\
 &\Leftrightarrow z = 3 - i
 \end{aligned}$$

Donc  $S = \{3 - i\}$

**Q13**

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|iz - 3| = 1$  est :

A	B	C	D
le cercle de centre $A(-3)$ et de rayon 1	le cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 1	la droite d'équation $6x + 8y + 15 = 0$	la droite d'équation $6x - 8y + 15 = 0$

Réponse B :

$$\begin{aligned}
 |iz - 3| &= |i(z + 3i)| = |i| \times |z + 3i| \\
 &= |z - (-3i)|
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } |iz - 3| = 1 \Leftrightarrow |z - (-3i)| = 1$$

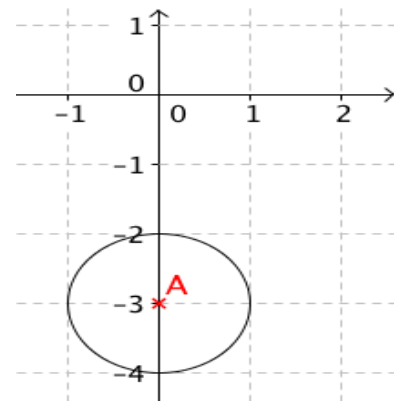
Soit  $A$  le point d'affixe  $-3i$

alors  $|iz - 3| = 1$  s'écrit  $AM = 1$ .

En effet :  $|z - (-3i)| = AM$ .

L'ensemble des points  $M$  est

le cercle de centre  $A(-3i)$  et de rayon 1



Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soient les points  $A(a)$  ;  $B(b)$  et  $C(c)$  tel que :  $a = 2$  ;  $b = -1 + i$  et  $c = 3 + 3i$

La nature du triangle ABC est :

A	le triangle ABC est équilatéral
B	le triangle ABC rectangle en A mais non isocèle en A
C	le triangle ABC est isocèle et rectangle en A
D	le triangle ABC est isocèle en A mais n'est pas rectangle en A
E	le triangle ABC est isocèle et rectangle en B

Réponse C :

On remarque que le sommet A est répété dans trois réponses donc :

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{3 + 3i - 2}{-1 + i - 2} = \frac{1 + 3i}{-3 + i} = \frac{(1 + 3i)(-3 - i)}{(-3)^2 + 1^2}$$

$$= \frac{-3 - i - 9i + 3 + 3i}{10} = \frac{-10i}{10} = -i = \left[1; -\frac{\pi}{2}\right]$$

$\Rightarrow$  le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

### Q15

Soit  $u$  un nombre complexe tel que  $u \notin \mathbb{R}$  et  $(\forall z \in \mathbb{C}) : |1 + uz| = |1 + \bar{u}z|$ , alors :

A	B	C	D	E
$z = 1$	$z = -\bar{z}$	$z = -i\bar{z}$	$z = i\bar{z}$	$z = \bar{z}$

Réponse E :

$$|1 + uz| = |1 + \bar{u}z| \Rightarrow |1 + uz|^2 = |1 + \bar{u}z|^2$$

$$\Rightarrow (1 + uz)\overline{(1 + uz)} = (1 + \bar{u}z)\overline{(1 + \bar{u}z)}$$

$$\Rightarrow (1 + uz)(1 + \bar{u}\bar{z}) = (1 + \bar{u}z)(1 + u\bar{z})$$

$$\Rightarrow 1 + \bar{u}\bar{z} + uz + u\bar{u}z\bar{z} = 1 + u\bar{z} + \bar{u}z + u\bar{u}z\bar{z}$$

$$\Rightarrow \bar{u}\bar{z} + uz = u\bar{z} + \bar{u}z$$

$$\Rightarrow (u - \bar{u})z + (u - \bar{u})\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow (u - \bar{u})(z - \bar{z}) = 0$$

Et on a  $u \notin \mathbb{R}$  donc  $u \neq \bar{u}$ , d'où,  $u - \bar{u} \neq 0$

Donc  $z - \bar{z} = 0$

Donc  $z = \bar{z}$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

On considère le point  $M$  d'affixe le nombre complexe  $z$

et  $M'$  le point d'affixe  $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

Les valeurs du nombre complexe  $z$  pour que les points  $M$  et  $M'$  soient confondues est :

A	B	C	D	E
$\{i; -i\}$	$\{1; i\}$	$\{-1; 1\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Réponse C :

$$M = M' \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1$$

### Q17

On considère le nombre complexe suivant :  $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{8}}$ . Un argument de  $z$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	Autre réponse

Réponse A :

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{16}}(e^{-i\frac{\pi}{16}} + e^{i(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16})}) = e^{i\frac{\pi}{16}}(e^{-i\frac{\pi}{16}} + e^{i\frac{\pi}{16}})$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{16} e^{i\frac{\pi}{16}} \quad ; \text{ car } e^{i\frac{\pi}{16}} + e^{-i\frac{\pi}{16}} = 2\cos\frac{\pi}{16}$$

$2\cos\frac{\pi}{16} > 0$  donc  $2\cos\frac{\pi}{16} e^{i\frac{\pi}{16}}$  est la forme exponentielle de  $z$

### Q18

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$  est :

A	Le cercle (C) de centre 0 et de rayon 2 privé du point A d'affixe -1
B	Le cercle (C) de centre 0 et de rayon 3 privé du point A d'affixe -1
C	la droite (D) le médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(i)$ et $B(-i)$
D	la droite (D) le médiatrice du segment $[AB]$ . avec $A(2i)$ et $B(-i)$
E	Le cercle (C) de centre 0 et de rayon 1 privé du point A d'affixe -1

Réponse E :

On pose  $z = x + iy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $z \neq -1$

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+1} &= \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} \\ &= \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2-ix(y+1)+ix(y-1)+(y-1)(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2-ix(y+1)(y-1)+(y-1)(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1-ix(y^2-1)}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} - \frac{x(y^2-1)}{x^2+(y+1)^2}i \end{aligned}$$

Donc :  $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$  et  $z \neq -1$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z \neq -1$$

Donc l'ensemble des points  $M(z)$  c'est le cercle (C) de centre O et de rayon 1 privé du point A d'affixe -1

### Q19

Soit le nombre complexe suivant  $z = 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ . alors un argument de z est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$

Réponse E :

$$\begin{aligned} z &= 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \\ &= 2 \left( 1 - e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \left( e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \left( e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}} \right) \\ &= -4i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}} \quad ; \quad \left( \text{car } e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}} = -2i \sin\frac{\pi}{8} \right) \\ &= 4 e^{-i\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}} \\ &= 4 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right)} \quad ; \quad ; \quad \left( \text{car } -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= 4 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-i\frac{3\pi}{8}} \end{aligned}$$

$4 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$  donc  $-\frac{3\pi}{8}$  est un argument de z

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

la nature de la transformation  $f$  qui associe chaque point  $M(z)$  par son image  $M'(z')$  tel que  $f(z) = z' = iz + 2 - i$  est :

A	L'homothétie de rapport 4 est de centre $\Omega$ d'affixe $i$
B	La rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
C	La rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
D	La rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
E	la translation de vecteur $\vec{u}(-3i)$

Réponse C :

**Astuce :**  $f$  une transformation tel que  $z' = az + b$

- Si  $a = 1$  alors  $f$  est la translation de vecteur  $\vec{u}(b)$
- Si  $a \neq 1$  alors  $f$  est l'homothétie de rapport  $a$  et de centre  $\Omega(\frac{b}{1-a})$
- Si  $a \neq 1$  et  $|a| = 1$  alors la transformation  $f$  est la rotation de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$  est d'angle  $\theta = \arg(a)$

$$z' = -iz + 2 - i ,$$

$$\text{On a } a = -i \neq 1 \text{ et } |a| = |-i| = 1$$

Donc  $f$  est la rotation de centre  $\Omega$  d'affixe

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{b}{1-a} = \frac{2-i}{1+i} \\ &= \frac{(2-i)(1-i)}{2} \\ &= \frac{2-2i-i-1}{2} \\ &= \frac{1-3i}{2} \end{aligned}$$

$$\text{et d'angle } \theta \equiv \arg(a) \equiv \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

**Fin de sujet 04**

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace

### 1) Vecteurs coplanaires

$\vec{U}(x; y; z)$  ;  $\vec{V}(x'; y'; z')$  et  $\vec{W}(x''; y''; z'')$  Les vecteurs  $\vec{U}$  ;  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  sont coplanaires

ssi  $\exists(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 : \vec{W} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{V}$

➤ Les vecteurs  $\vec{U}$  ;  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  sont coplanaires

ssi  $\det(\vec{U}; \vec{V}; \vec{W}) = 0$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

### 2) Formule trigonométrique du produit scalaire

Soient  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  deux vecteurs non nuls dans l'espace donc :  $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{V} = \overrightarrow{AC}$

Le produit scalaire de  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  dans l'espace est le nombre réel noté  $\vec{U} \cdot \vec{V}$  et définit par :

➤  $\vec{U} \cdot \vec{V} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

➤  $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \cos(\overrightarrow{U}; \overrightarrow{V})$

### 3) Formule analytique de produit scalaire

Soient  $\vec{U}(x; y; z)$  et  $\vec{V}(x'; y'; z')$  on a :

➤  $\vec{U} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$

➤  $\vec{U} \perp \vec{V} \Leftrightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$

### 4) DROITE DANS L'ESPACE

Soit  $(D)$  la droite qui passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur

$\vec{U}(a; b; c)$

Une représentation paramétrique de  $(D)$

$$(D): \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

### 5) Plan dans l'espace - Vecteur normale

➤ Tout plan à une équation cartésienne de la forme :  $(P) : ax + by + cz + d = 0$

➤ Le Vecteur  $\vec{n}(a; b; c)$  est un vecteur normal au plan  $(P) : ax + by + cz + d = 0$

➤ A un point et  $\vec{n}$  un vecteur de l'espace

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace tel que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est un plan  $(P)$  passant par A et de vecteur normale  $\vec{n}$

### DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN

Soient  $(P) : ax + by + cz + d = 0$  un plan et  $A(x_A; y_A; z_A)$  un point de l'espace

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

### 6) Sphère dans l'espace

Soit  $(S)$  la sphère de centre  $\Omega(a; b; c)$  et de rayon r l'équation cartésienne de  $(S)$  est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

➤ L'équation cartésienne de la sphère  $(S)$  définit par son diamètre  $[AB]$  est donné

par :  $M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

### 7) Position relative d'une sphère et un plan

Soit  $(S)$  une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon R  $(P)$  un plan et d la distance entre le centre  $\Omega$  est le plan  $(P) : d = d(\Omega; (P))$

Si  $d=R$  alors  $(S)$  est tangente à  $(P)$  un point H

Si  $d < R$  alors  $(S)$  coupe  $(P)$  Suivant un cercle

$(C)$  de centre H et de rayon  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

➤ Pour déterminer les coordonnées de H on résoudre le système suivant :

$$(\Omega H): \begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

$$(P) : ax + by + cz + d = 0$$

### Expression analytique du produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

➤  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont colinéaires ssi  $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

➤ A ; B et C sont alignés ssi  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

➤ Le vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$

### Distance d'un point $\Omega$ à une droite $(D)$

$(D)$  la droite qui passe par A et de vecteur directeur  $\vec{U}$  et  $\Omega$  un point de l'espace

Alors  $d(\Omega; (D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{U}\|}{\|\vec{U}\|}$

### Aire d'un triangle ABC

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC \times \sin \hat{A}}{2} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

### Position relative d'une sphère et une droite

Soit  $(S)$  une sphère de centre  $\Omega$  et d rayon R et  $(\Delta)$  la droite passant par le point A et de

vecteur directeur  $\vec{U}(a; \beta; \gamma)$

Pour déterminer les coordonnées des points d'intersections de  $(S)$  et  $(\Delta)$ , on résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (\Delta): \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (S) : (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2 \end{cases}$$

### 1) Arrangements.

#### Arrangements sans répétition.

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1).$$

$$\text{On a : } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} ; A_n^n = n! ; A_n^1 = n.$$

#### Cas particulier : Permutations.

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1.$$

#### Arrangements avec répétition.

Le nombre d'arrangements avec répétition de  $p$  éléments pris parmi  $n$  est noté  $n^p$

### 2) Combinaisons.

$$\checkmark \text{ On a : } C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Remarques :  $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$  ;  $C_n^n = C_n^0 = 1$   
et  $C_n^p = C_n^{n-p}$

#### Nombre de possibilité d'arranger $p$ éléments (Coefficient d'ordre)

Si on a  $p_1$  éléments de type A et  $p_2$  éléments de type B et  $p_3$  éléments de type C tel que

$$p_1 + p_2 + p_3 = p$$

Alors le nombre de possibilité d'arranger les  $p$  éléments est  $\frac{p!}{p_1! \times p_2! \times p_3!}$

### 3) Probabilité d'un évènement.

- $P(\Omega) = 1$  et  $P(\emptyset) = 0$ .
- $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

#### Hypothèse d'équiprobabilité.

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

### 4) Probabilité conditionnelle.

$$P(B/A) \text{ défini par : } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

#### Remarques :

$$\text{On a : } P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

$$\text{Donc } P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

Cette relation est appelée loi des probabilités totales.

#### Indépendance de deux évènements.

On dit que les évènements A et B sont indépendants si :  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

- Les évènements A et B sont indépendants si et seulement  $P_A(B) = P(B)$  ; avec  $P(A) \neq 0$

### 5) Epreuves répétées.

Soit A un évènement associé à une expérience de probabilité  $p$ . On répète l'expérience  $n$  fois dans les mêmes conditions

Alors la probabilité de réaliser exactement  $k$  fois l'évènement A est :  $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ , pour tout  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

### 6) Variable aléatoire-Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

La loi de la variable X c'est calculer la probabilité de chacun des évènements  $\{X = x_i\}$  où  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

#### Espérance mathématique-Variance et écart-type.

##### L'espérance mathématique

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

La variance  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

L'écart-type de X est :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

### 7) Loi binomiale.

Soit une expérience aléatoire formée d'une répétition  $n$  fois de manière indépendante d'une même épreuve à deux issues sont : A succès de probabilité  $p$ , et  $\bar{A}$  échec de probabilité  $q = 1 - p$

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le succès se réalise

On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$

- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .
- $(\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\})$   
 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ .

- L'espérance de la variable aléatoire X est :  $E(X) = np$ .

- La variance de la variable aléatoire X est :

$$V(X) = npq = np(1-p) = E(X) \cdot (1-p)$$

**A) Equations différentielles de premier ordre :  $y' = ay + b$**

1) L'équation (E) ;  $y' = ay + b$  tel que a et b deux constantes réelles est appelée équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; ou y est la fonction inconnue et y' sa fonction dérivée

2) On appelle solution de l'équation (E) , toute fonction f qui vérifie  $f'(x) = af(x) + b$

**Résolution de l'équation : (E) ;  $y' = ay + b$**

1) Les solutions de l'équation  $y' = ay$  sont les fonctions y définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $y(x) = ke^{ax}$  ou k est une constante réelle

2) Les solutions de l'équation  $y' = ay + b$  sont les fonctions y définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$  ou k est une constante

3) Soient  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$   
Il existe une solution unique y de (E) qui vérifie  $y(x_0) = y_0$

**B) Equations différentielles du second ordre :  $y'' + ay' + by = 0$**

1) L'équation (E) :  $y'' + ay' + by = 0$  tel que a et b deux constantes réelles est appelée équation différentielle linéaire du second ordre ou y est la fonction inconnue et y' sa dérivée première et y'' sa dérivée d'ordre 2

2) L'équation  $r^2 + ar + b = 0$  s'appelle l'équation caractéristique associée à l'équation (E) :  $y'' + ay' + by = 0$

**Résolution de : (E) ;  $y'' + ay' + by = 0$**

Soit  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$  , associée à (E) :  $y'' + ay' + by = 0$

➤ **Cas 01 ;  $\Delta > 0$**

L'équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$  , admet deux solutions réelles  $r_1$  et  $r_2$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

➤ **Cas 02 ;  $\Delta = 0$**

L'équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$  , admet une solution réelle unique  $r_0$

Donc les solutions de l'équation (E) ; sont les fonctions y définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x} ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

➤ **Cas 03 ;  $\Delta < 0$**

L'équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$  , admet deux solutions complexes  $z_1 = p + iq$  et  $z_2 = \overline{z_1}$

Donc les solutions de l'équation (E) ; sont les fonctions y définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{px}$$

ou  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**Q1\_ ( Question 02 concours commun faculté de médecine 2022)**

Si  $f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 4y = 0$  alors  $g = 2f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

A	B	C	D	E
$y'' + 2y' + 4y = 0$	$y'' + y' + y = 0$	$y'' + 4y' + 4y = 0$	$2y'' + 4y' + y = 0$	Autre

**Q2\_ ( Question 06 concours commun faculté de médecine 2022)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points  $A(1; 2; 3)$  et  $B(2; 0; 1)$ .

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  équidistants des points A et B est

A	B	C	D	E
Le plan $x - y + z = 6$	Le plan $2x - 4y - 4z = -9$	Le plan $2x - 4y - 4z = 9$	La droite : $x + y + z = 6$ et $2x - 4y - 4z = -9$	Autre

**Q3\_ ( Question 13 concours commun faculté de médecine 2022)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan (P) d'équation  $3x - 2z + 3 = 0$

On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6

On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre  $a$  ( $1 \leq a \leq 6$ )

La probabilité que le point  $A(a^2; 2a; 6a - 3)$  appartienne au plan (P) est .

A	B	C	D	E
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	Autre réponse

**Q4\_ ( Question 09 concours commun faculté de médecine casa 2019)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans (P) :  $x - z + 1 = 0$  et (Q) :  $x + y + 1 = 0$  et  $M(x_0; y_0; z_0)$  un point équidistant à (P) et (Q).

Les coordonnées du point  $M$  vérifient :

**A**  $y_0 + z_0 = 0$  ou  $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$

**D**  $2x_0 + y_0 = 0$  ou  $y_0 + z_0 = 0$

**B**  $y_0 + z_0 = 0$  ou  $y_0 - z_0 = 0$

**C**  $2x_0 + y_0 = 0$  ou  $y_0 - z_0 = 0$

**E**  $y_0 - z_0 = 0$  ou  $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$

**Q5\_ ( Question 10 concours commun faculté de médecine casa 2019)**

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2 et trois boules vertes portant les nombres 1; 1; 2. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne. La probabilité d'avoir deux boules portant deux nombres différents sachant qu'elles sont de même couleur, est égale à :

**A**  $\frac{5}{42}$

**B**  $\frac{2}{21}$

**C**  $\frac{10}{42}$

**D**  $\frac{3}{7}$

**E**  $\frac{2}{3}$

**Q6**

Si  $f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (E):  $y'' - 2y' + 5y = 0$  alors la solution  $f$  de (E) sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie  $f(0) = 5$  et  $f'(0) = 9$  est :

A	B	C	D
$\cos(2x)e^x$	$5 \cos(2x) - 2 \sin(2x))e^x$	$2 \sin(2x))e^x$	$5 \cos(2x) + 2 \sin(2x))e^x$

**Q7**

Un sac  $S_1$  contient 2 boules rouges et 3 boules noires.  
Un autre sac  $S_2$  contient 3 boules rouges et deux noires.  
On tire une boule de  $S_1$  si elle est noire on la met dans  $S_2$ , puis on tire une boule de  $S_2$  et si elle est rouge on l'écarte à côté puis on tire une boule de  $S_2$   
La probabilité de l'événement "La boule tirée du sac  $S_2$  est rouge" est :

A	B	C	D	E
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

**Q8**

Une urne contient 9 boules : 5 boules rouges numérotées 0;1;1;1;2  
4 boules vertes numérotées :0;1;1;2, sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément 3 boules de ce sac

On considère les événements suivants:

B "Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 3

C "Obtenir 3 boules vertes"

Alors  $P_B(C)$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

**Q9**

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève. La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D	E
0,4	0,5	0,6	0,7	Autre réponse

**Q10**

On garde les mêmes données de la question Q9. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon, la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A	B	C	D	E
0,25	0,35	0,45	0,55	Autre réponse

Réponse B :

**Q11**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan (P) d'équation cartésienne (P):  $2x - y - 2z + 2 = 0$  et la sphère (S) d'équation (S):  $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$ . Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :

A	B	C	D
$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

**Q12**

Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- ✚ Une entrée à choisir parmi 6 entrées possibles notée  $E_1, E_2, E_3$
- ✚ Un plat à choisir parmi 4 plats possibles notés  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$ .
- ✚ Un dessert à choisir parmi 5 desserts possibles notés  $D_1, D_2, D_3, D_4$  et  $D_5$ .

Combien un client peut-il composer de menus différents ? Sachant qu'un menu contient une entrée, un plat et un dessert.

A	B	C	D	E
120	30	40	50	60

**Q13**

De combien de façons 5 enfants peuvent-ils s'asseoir sur un siège à 5 places				
A	B	C	D	E
84	240	120	50	60

**Q14**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , Soit le plan (P) d'équation (P) :  $2x + y - z + 1 = 0$  et (R) le plan d'équation  $x - 3y - z + 3 = 0$   
Une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection des plan (P) et (R)

A	B	C	D
$\begin{cases} x = -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}t \\ y = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}t \\ y = \frac{5}{7} + \frac{1}{7}t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$

**Q15**

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.  
Soit X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs. Alors  $P(X = 5)$  égale

A	B	C	D	E
$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

**Q16**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soit (P) le plan défini par l'équation (P) :  $2x + 3y - z + 4 = 0$  et A(1; 0; 1) un point de l'espace  
Les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P) sont :

A	B	C	D	E
$(-2; \frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$	$(-2; \frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$	$(2; \frac{9}{2}; \frac{1}{2})$	$(2; \frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$	(1; 0; 1)

**Q17**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soit le plan  $(P_d): x - 4y + 2z + d = 0$  et (S) est une sphère de centre  $\Omega(1; 2; 3)$  et de rayon  $\sqrt{21}$   
Les valeurs de réel d pour que le pan  $(P_d)$  coupe (S) suivant un cercle de rayon  $r > 0$  est

A	B	C	D	E
{20; 21}	{-20; 22}	] -20; 22]	[-20; 22]	] -20; 22[

**Q18**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$   
Soit le plan  $(P): 2x - 5y - 6z + 4 = 0$  et  $(S)$  est une sphère de centre  $\Omega(2; -2; 3)$  et de rayon 3. Alors :

A	Le plan $(P)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle de rayon 3 est de centre $\Omega$
B	Le plan $(P)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle de rayon 3 est de centre $H(2; 2; 3)$
C	Le plan $(P)$ est tangente à la sphère en $H(2; 2; 3)$
D	Le plan $(P)$ est tangente à la sphère en $H(2; 0; 3)$
E	Le plan $(P)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle de rayon 1 est de centre $H(2; 0; 3)$

**Q19**

Un sac  $S_1$  contient 4 boules rouges et 2 boules noires.  
Un sac  $S_2$  contient 2 boules rouges et une boule noire.  
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.  
On choisit au hasard l'un des sacs, puis on en tire une boule de ce sac.  
Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac  $S_1$  ?

A	B	C	D	E
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

**Q20**

Soit la fonction  $g$  une solution de l'équation différentielle : (E):  $y'' - 4y' + 13y = 0$  tels que :  $g(0) = 0$  ;  $g'(0) = 3$  ;  $g(\pi) = 0$  et  $g'(\pi) = -3e^{2\pi}$   
Alors  $\int_0^\pi g(x) dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{13}(1 + e^{2\pi})$	$\frac{2}{13}(1 - e^{2\pi})$	$\frac{3}{13}(1 - e^{2\pi})$	$\frac{4}{13}(1 + e^{2\pi})$	$\frac{3}{13}(1 + e^{2\pi})$

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**Q1\_ ( Question 02 concours commun faculté de médecine 2022)**

Si  $f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 4y = 0$  alors  $g = 2f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

A	B	C	D	E
$y'' + 2y' + 4y = 0$	$y'' + y' + y = 0$	$y'' + 4y' + 4y = 0$	$2y'' + 4y' + y = 0$	Autre

**Réponse A :**

$f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 4y = 0$

Donc  $f''(x) + 2f'(x) + 4f(x) = 0$  donc  $2f''(x) + 2 \times 2f'(x) + 2 \times 4f(x) = 0$

Donc  $(2f)''(x) + 2 \times (2f)'(x) + 4 \times (2f)(x) = 0$  donc  $g''(x) + 2 \times g'(x) + 4g(x) = 0$

Alors  $g = 2f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :  $y'' + 2y' + 4y = 0$

**Q2\_ ( Question 06 concours commun faculté de médecine 2022)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points  $A(1; 2; 3)$  et  $B(2; 0; 1)$ .

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  équidistants des points A et B est

A	B	C	D	E
Le plan $x - y + z = 6$	Le plan $2x - 4y - 4z = -9$	Le plan $2x - 4y - 4z = 9$	La droite : $x + y + z = 6$ et $2x - 4y - 4z = -9$	Autre

**Réponse B :**

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  équidistants des points A et B est le plan (P) médiateur au segment  $[AB]$

Donc le plan (P) passe par le milieu du segment  $[AB]$  le point  $I(\frac{3}{2}; 1; 2)$  est de vecteur normal  $\vec{AB}(1 - 2; -2)$  donc (P):  $x - 2y - 2z + d = 0$  et  $I(\frac{3}{2}; 1; 2) \in (P)$

Donc  $\frac{3}{2} - 2 - 4 + d = 0$  donc  $-\frac{9}{2} + d$  donc  $d = \frac{9}{2}$

D'où (P):  $x - 2y - 2z + \frac{9}{2} = 0$  donc (P):  $2x - 4y - 4z = -9$

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan (P) d'équation  $3x - 2z + 3 = 0$

On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6

On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre  $a$  ( $1 \leq a \leq 6$ )

La probabilité que le point  $A(a^2; 2a; 6a - 3)$  appartient au plan (P) est .

A	B	C	D	E
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	Autre réponse

**Réponse B :**

$$\begin{aligned}
 A(a^2; 2a; 6a - 3) \in (P) &\Leftrightarrow 3x_A - 2z_A + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3a^2 - 2(6a - 3) + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3a^2 - 12a + 9 = 0 \\
 &\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = 3
 \end{aligned}$$

Donc La probabilité que le point  $A(a^2; 2a; 6a - 3)$  appartient au plan (P) est  $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

**Q4\_ ( Question 09 concours commun faculté de médecine casa 2019)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans (P) :  $x - z + 1 = 0$  et (Q) :  $x + y + 1 = 0$  et  $M(x_0; y_0; z_0)$  un point équidistant à (P) et (Q).

Les coordonnées du point M vérifient :

- A**  $y_0 + z_0 = 0$  ou  $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$
- B**  $y_0 + z_0 = 0$  ou  $y_0 - z_0 = 0$
- C**  $2x_0 + y_0 = 0$  ou  $y_0 - z_0 = 0$
- D**  $2x_0 + y_0 = 0$  ou  $y_0 + z_0 = 0$
- E**  $y_0 - z_0 = 0$  ou  $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$

**Réponse A :**

On a (P) :  $x - z + 1 = 0$  et (Q) :  $x + y + 1 = 0$

Et on a  $M(x_0; y_0; z_0)$  un point équidistant à (P) et (Q) donc  $d(M; (P)) = d(M; (Q))$

$$\begin{aligned}
 d(M; (P)) = d(M; (Q)) &\Leftrightarrow \frac{|x_0 - z_0 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0 + y_0 + 1|}{\sqrt{2}} \\
 &\Leftrightarrow |x_0 - z_0 + 1| = |x_0 + y_0 + 1| \\
 &\Leftrightarrow x_0 - z_0 + 1 = x_0 + y_0 + 1 \text{ ou } x_0 - z_0 + 1 = -x_0 - y_0 - 1 \\
 &\Leftrightarrow y_0 + z_0 = 0 \text{ ou } 2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0
 \end{aligned}$$

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2 et trois boules vertes portant les nombres 1; 1; 2. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne. La probabilité d'avoir deux boules portant deux nombres différents sachant qu'elles sont de même couleur, est égale à :

**A**  $\frac{5}{42}$

**B**  $\frac{2}{21}$

**C**  $\frac{10}{42}$

**D**  $\frac{3}{7}$

**E**  $\frac{2}{3}$

**Réponse E :**

**A « obtenir 2 boules portant deux nombres différents »**

**B « obtenir 2 boules de même couleur» (V; V) ou (R ; R)**

*Donc* :  $p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$

**A ∩ B « obtenir 2 boules de même couleur et portant deux nombres différents » (V<sub>1</sub> ; V<sub>2</sub>) ou (R<sub>1</sub> ; R<sub>2</sub>)**

*Donc*  $p(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \frac{2 \times A_2^1 \times A_2^1 + 2 \times A_2^1 \times A_1^1}{A_7^2} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$

*Donc*  $p_B(A \cap B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$

**Q6**

Si  $f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (E):  $y'' - 2y' + 5y = 0$  alors la solution  $f$  de (E) sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie  $f(0) = 5$  et  $f'(0) = 9$  est :

A	B	C	D
$\cos(2x)e^x$	$5 \cos(2x) - 2 \sin(2x)e^x$	$2 \sin(2x)e^x$	$5 \cos(2x) + 2 \sin(2x)e^x$

**Réponse D :**

**1<sup>ère</sup> méthode :**

Les solutions qui vérifie  $f(0) = 5$  sont B et D

La solution qui vérifie  $f'(0) = 9$  est D

Donc il faut cocher D

**2<sup>ème</sup> méthode :**

L'équation caractéristique associée à (E) est  $r^2 - 2r + 5 = 0$

On a  $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$

Donc l'équation caractéristique  $r^2 - 2r + 5 = 0$ , admet deux solutions complexes sont

$z_1 = \frac{2+i\sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 + 2i$  et  $z_2 = \bar{z}_1$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions  $y$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y(x) = (\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x))e^{1 \times x} \text{ ou } \alpha; \beta \in \mathbb{R}$$

On a  $f(x) = (\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x))e^x$  ;  $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$

Déterminons  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $f(0) = 5$  et  $f'(0) = 9$

$$f' = (-2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x))e^x + (\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x))e^x$$

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ f'(0) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ 2\beta + \alpha = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ 2\beta + 5 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

D'où  $f(x) = (5 \cos(2x) + 2 \sin(2x))e^x$

### Q7

Un sac  $S_1$  contient 2 boules rouges et 3 boules noires.

Un autre sac  $S_2$  contient 3 boules rouges et deux noires.

On tire une boule de  $S_1$  si elle est noire on la met dans  $S_2$ , puis on tire une boule de  $S_2$  et si elle est rouge on l'écarte à côté puis on tire une boule de  $S_2$

La probabilité de l'événement "La boule tirée du sac  $S_2$  est rouge" est :

A	B	C	D	E
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

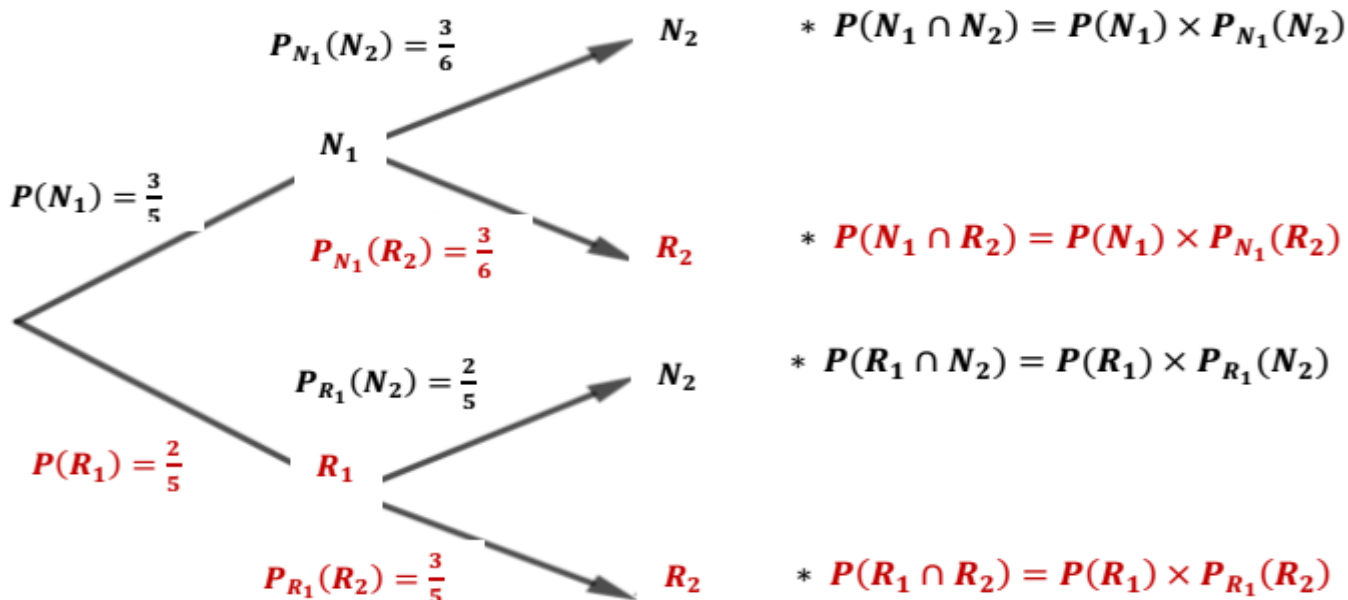
Réponse D :

$N_1$  : "La boule tirée du sac  $S_1$  est noire"

$R_1$  : "La boule tirée du sac  $S_1$  est rouge"

$R_2$  : "La boule tirée du sac  $S_2$  est rouge"

$N_2$  : "La boule tirée du sac  $S_2$  est noire"



$$\begin{aligned}
 P(R_2) &= P(N_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) \\
 &= P(N_1) \times P_{N_1}(R_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \\
 &= \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10} + \frac{6}{25} = \frac{27}{50}
 \end{aligned}$$

## Q8

Une urne contient 9 boules : 5 boules rouges numérotées 0;1;1;1;2  
4 boules vertes numérotées :0;1;1;2, sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément 3 boules de ce sac

On considère les événements suivants:

B "Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 3

C "Obtenir 3 boules vertes"

Alors  $P_B(C)$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

Réponse A :

**B "Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 3(1 ;1 ;1) ou (0 ;1 ;2)**

$$\text{Donc : } \text{Card}(B) = C_5^3 + (C_2^1 \times C_2^1 \times C_5^1) = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} + 2 \times 2 \times 5 = 10 + 20 = 30$$

$$\text{Par suite } p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

**B ∩ C "Obtenir 3 boules vertes dont la somme des numéros est égale à 3" (0 ;1 ;2)**

$$\text{Donc : } \text{Card}(B \cap C) = C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 = 2$$

$$\text{Par suite } p(B \cap C) = \frac{\text{Card}(B \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

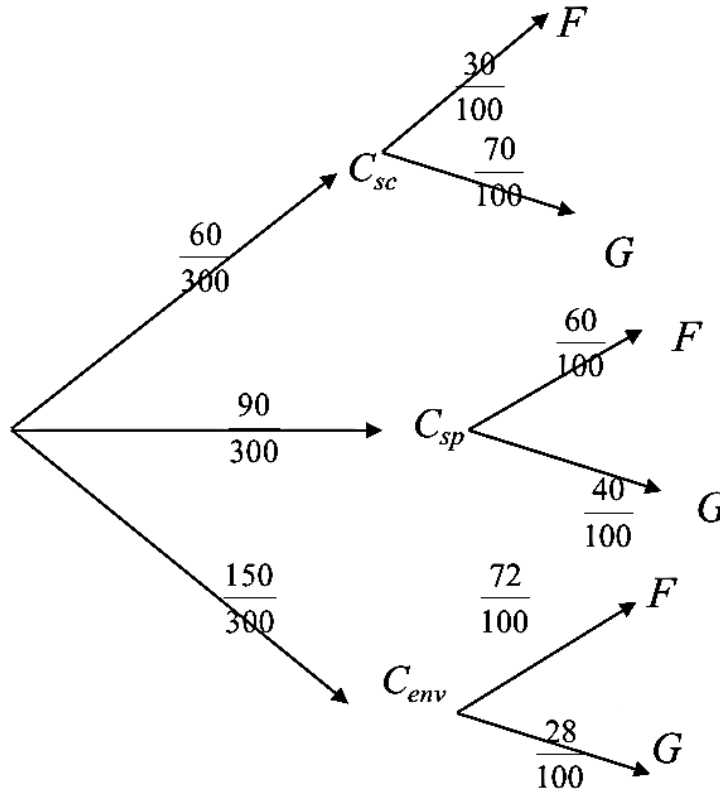
$$P_B(C) = \frac{p(B \cap C)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{42}}{\frac{5}{14}} = \frac{1}{42} \times \frac{14}{5} = \frac{1}{15}$$

## Q9

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève. La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D	E
0,4	0,5	0,6	0,7	Autre réponse

## Réponse C :



On a :  $P(F) = P(C_{sc})P_{C_{sc}}(F) + P(C_{sp})P_{C_{sp}}(F) + P(C_{env})P_{C_{env}}(F)$  (Formule des probabilités totales)

$$= \frac{60}{300} \times \frac{30}{100} + \frac{90}{300} \times \frac{60}{100} + \frac{150}{300} \times \frac{72}{100} = \frac{1800 + 5400 + 10800}{300 \times 100} = \frac{180}{300} = \frac{3}{5} = 0,6$$

## Q10

On garde les mêmes données de la question Q9. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon, la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A	B	C	D	E
0,25	0,35	0,45	0,55	Autre réponse

## Réponse B :

$$P_G(C_{env}) = \frac{P(G \cap C_{env})}{P(G)} = \frac{P(C_{env}) \times P_{C_{env}}(G)}{P(G)} = \frac{150 \times \frac{28}{100}}{0,4} = \frac{4200}{300 \times 100} = \frac{4200}{30000} = \frac{420}{3000} = \frac{7}{20} = 0,35$$

## Q11

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan (P) d'équation cartésienne (P):  $2x - y - 2z + 2 = 0$  et la sphère (S) d'équation

(S):  $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$ . Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :

A	B	C	D
$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

## Réponse A :

On a  $(S): (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z+5)^2 = 6^2$ , donc  $(S) = S(\Omega(3,0,-5), 6)$

$\vec{n}(2,-1,-2)$  est un vecteur normal au plan  $(P)$ .

Comme  $(D)$  est la droite passant par  $\Omega(3,0,-5)$  et de vecteur directeur  $\vec{n}(2,-1,-2)$  alors l'une de ses représentations paramétriques est celle proposée dans (A)

## Q12

Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- ✚ Une entrée à choisir parmi 6 entrées possibles notée  $E_1, E_2, E_3$
- ✚ Un plat à choisir parmi 4 plats possibles notés  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$ .
- ✚ Un dessert à choisir parmi 5 desserts possibles notés  $D_1, D_2, D_3, D_4$  et  $D_5$ .

Combien un client peut-il composer de menus différents ? Sachant qu'un menu contient une entrée, un plat et un dessert.

A	B	C	D	E
120	30	40	50	60

## Réponse A :

le nombre des résultats possibles est  $6 \times 4 \times 5 = 120$

## Q13

De combien de façons 5 enfants peuvent-ils s'asseoir sur un siège à 5 places

A	B	C	D	E
84	240	120	50	60

## Réponse C :

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ .

## Q14

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , Soit le plan  $(P)$  d'équation  $(P): 2x + y - z + 1 = 0$  et  $(R)$  le plan d'équation  $x - 3y - z + 3 = 0$

Une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  l'intersection des plan  $(P)$  et  $(R)$

A	B	C	D
$\begin{cases} x = -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}t \\ y = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}t \\ y = \frac{5}{7} + \frac{1}{7}t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$

## Réponse A :

(P) et (R) sont sécantes suivant une droite (D) défini par les deux équation des plans (P)

et (R) donc : (D):  $\begin{cases} (P): 2x + y - z + 1 = 0 \\ (R): x - 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$

On pose par exemple  $z = t$  donc  $\begin{cases} 2x + y - t + 1 = 0 \\ x - 3y - t + 3 = 0 \end{cases}$  ; Donc  $\begin{cases} 2x + y = t - 1 \\ x - 3y = t - 3 \end{cases}$

On cherche à exprimer x et y en fonction de t

J'ai choisit la méthode de déterminant de GRAMER

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ t-3 & -3 \end{vmatrix} = -3(t-1) - (t-3) = -2t + 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & t-1 \\ 1 & t-3 \end{vmatrix} = 2(t-3) - (t-1) = t - 5$$

$$\text{Donc : } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2t + 6}{-7} = -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}t \quad \text{et} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{t-5}{-7} = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}t$$

Donc une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection des plan (P) et (R)

est (D):  $\begin{cases} x = -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}t \\ y = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}t \\ z = t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

## Q15

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.

Soit X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs.

Alors  $P(X = 5) =$

A	B	C	D	E
$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

## Réponse D :

La plus grande des deux valeurs est 5, si on obtient les combinaisons : (1 ; 5), (5 ; 1) (2 ; 5),

(5 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 3), (4 ; 5), (5 ; 4) ou (5 ; 5). Donc  $P(X = 5) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

## Q16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soit (P) le plan défini par l'équation (P) :  $2x + 3y - z + 4 = 0$  et  $A(1; 0; 1)$  un point de l'espace

Les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P) sont :

A	B	C	D	E
$(-2; \frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$	$(-2; \frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$	$(2; \frac{9}{2}; \frac{1}{2})$	$(2; \frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$	(1; 0; 1)

## Réponse B :

Les coordonnées du point  $H$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $(P)$  est l'intersection du plan  $(P)$  et la droite  $(D)$  passant par le point  $A$ , et orthogonale au plan  $(P)$

Alors les coordonnées  $(x ; y ; z)$  de  $H$  vérifie le systèmes : 
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = 1 - t \\ 2x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases} ;$$

Donc on remplace  $x = 1 - 2t$  ;  $y = 3t$  et  $z = 1 - t$  dans  $2x + 3y - z + 4 = 0$

On trouve :  $2(1 - 2t) + 3(3t) - (1 - t) + 4 = 0$

Donc  $2 - 4t + 9t - 1 - t + 4 = 0$  ; Donc  $4t = 6$ . Donc  $t = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

On remplace  $t = \frac{3}{2}$  dans  $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$  ; On trouve  $\begin{cases} x = 1 - 2 \times \frac{3}{2} \\ y = 3 \times \frac{3}{2} \\ z = 1 - \frac{3}{2} \end{cases}$  Donc  $\begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{9}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc  $H(-2 ; \frac{9}{2} ; -\frac{1}{2})$

## Q17

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit le plan  $(P_d): x - 4y + 2z + d = 0$  et  $(S)$  est une sphère de centre  $\Omega(1 ; 2 ; 3)$  et de rayon  $\sqrt{21}$

Les valeurs de réel  $d$  pour que le plan  $(P_d)$  coupe  $(S)$  suivant un cercle de rayon  $r > 0$  est

A	B	C	D	E
$\{20 ; 21\}$	$\{-20 ; 22\}$	$] -20 ; 22 ]$	$[ -20 ; 22 ]$	$] -20 ; 22 [$

## Réponse E :

On a le plan  $(P_d)$  coupe  $(S)$  suivant un cercle est :

Donc  $d(\Omega; (P_d)) < \sqrt{21}$

Donc :  $\frac{|1 - 8 + 6 + d|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2}} < \sqrt{21}$

Donc :  $\frac{|-1+d|}{\sqrt{21}} < \sqrt{21}$  donc :  $|d - 1| < 21$

Donc :  $-21 < d - 1 < 21$

Donc :  $-20 < d < 22$

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit le plan  $(P): 2x - 5y - 6z + 4 = 0$  et  $(S)$  est une sphère de centre  $\Omega(2; -2; 3)$  et de rayon 3. Alors :

A	Le plan $(P)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle de rayon 3 est de centre $\Omega$
B	Le plan $(P)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle de rayon 3 est de centre $H(2; 2; 3)$
C	Le plan $(P)$ est tangente à la sphère en $H(2; 2; 3)$
D	Le plan $(P)$ est tangente à la sphère en $H(2; 0; 3)$
E	Le plan $(P)$ est tangente à la sphère en $H(2; 0; -3)$

Réponse A :

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|(2 \times 2) + (5 \times 2) - (6 \times 3) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-0)^2}} = \frac{0}{\sqrt{9}} = 0 < R = 3$$

Donc le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle de même rayon que  $(S)$

donc  $r = \sqrt{R^2 - 0^2} = R = 3$ . Et comme  $d(\Omega; (ABC)) = 0$  donc le centre de cercle  $(\Gamma)$  est  $\Omega(2; -2; 3)$  le centre du sphère  $(S)$

Q19

Un sac  $S_1$  contient 4 boules rouges et 2 boules noires.

Un sac  $S_2$  contient 2 boules rouges et une boule noire.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On choisit au hasard l'un des sacs, puis on en tire une boule de ce sac.

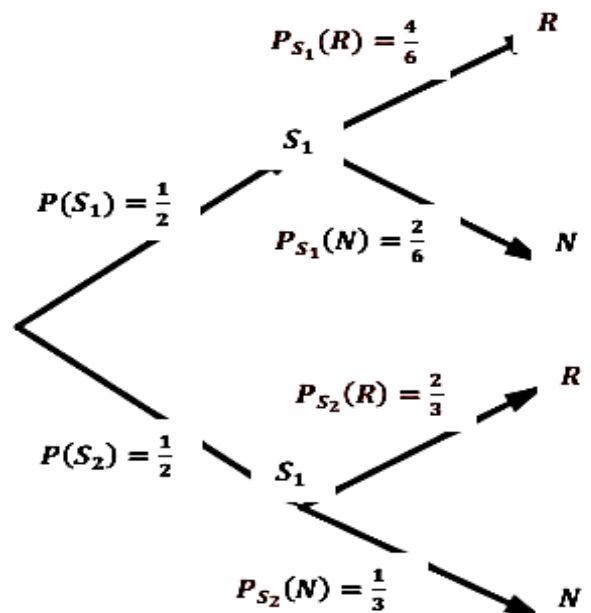
Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac  $S_1$  ?

A	B	C	D	E
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

Réponse C :

$$P_R(S_1) = \frac{P(R \cap S_1)}{P(R)} = \frac{P(S_1) \times P_{S_1}(R)}{P(S_1) \times P_{S_1}(R) + P(S_2) \times P_{S_2}(R)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{6}}{\frac{1}{2} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$



Soit la fonction  $g$  une solution de l'équation différentielle : (E):  $y'' - 4y' + 13y = 0$  tels que :  $g(0) = 0$  ;  $g'(0) = 3$  ;  $g(\pi) = 0$  et  $g'(\pi) = -3e^{2\pi}$

Alors  $\int_0^\pi g(x) dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{13}(1 + e^{2\pi})$	$\frac{2}{13}(1 - e^{2\pi})$	$\frac{3}{13}(1 - e^{2\pi})$	$\frac{4}{13}(1 + e^{2\pi})$	$\frac{3}{13}(1 + e^{2\pi})$

Réponse E :

On a  $g$  est une solution de (E) donc  $g''(x) - 4g'(x) + 13g(x) = 0$

$$\text{Donc } g(x) = \frac{1}{13}(4g'(x) - g''(x))$$

$$\int_0^\pi g(x) dx = \int_0^\pi \frac{1}{13}(4g'(x) - g''(x)) dx$$

$$= \frac{4}{13} \int_0^\pi g'(x) dx - \frac{1}{13} \int_0^\pi g''(x) dx$$

$$= \frac{4}{13} [g(x)]_0^\pi - \frac{1}{13} [g'(x)]_0^\pi$$

$$= \frac{4}{13} (g(\pi) - g(0)) - \frac{1}{13} (g'(\pi) - g'(0))$$

$$= \frac{4}{13} (0 - 0) - \frac{1}{13} (-3e^{2\pi} - 3)$$

$$= \frac{3}{13}(1 + e^{2\pi})$$

Fin du sujet 05 :

**Fonction arctangente**

La fonction  $x \rightarrow \tan x$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$ . La fonction réciproque est appelé arctangente, notée  $\arctan$

**Propriétés :**

1)  $(\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[); (\forall y \in \mathbb{R})$

$\tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan y$

2)  $(\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[): \arctan(\tan x) = x$

$(\forall x \in \mathbb{R}) : \tan(\arctan x) = x$

$(\forall x \in \mathbb{R}) : \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\forall x \in \mathbb{R}) : \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3)  $(\forall x; y \in \mathbb{R}) : \arctan x = \arctan y \Leftrightarrow x = y$

La fonction  $\arctan$  est impaire

4)  $\forall x \in ]0; +\infty[: 0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$

$\forall x \in ]-\infty; 0[: -\frac{\pi}{2} < \arctan x < 0$

5)  $(\forall x \in ]0; +\infty[); \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

$(\forall x \in ]-\infty; 0[); \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

6) Soient  $a; b \in \mathbb{R}^+$

$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right); ab \neq 1$

$\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$

**Valeurs importantes :**

$x$	0	$\pm 1$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\pm(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)$
$\arctan(x)$	0	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{8}$

**Limites :**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$

**Fonction dérivée :**

$(\forall x \in \mathbb{R}) : (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\forall x \in I) : (\arctan U(x))' = \frac{U(x)'}{1+U^2(x)}$

**Intégration par changement de variable**

$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$

On pose  $t = g(x)$  donc  $dt = g'(x)dx$

**Fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$**

$F(x) = \int_0^x f(t) \Rightarrow (\forall x \in I); F'(x) = f(x)$

$f$  est paire  $\Rightarrow F$  est impaire

$f$  est impaire  $\Rightarrow F$  est paire

**Dérivation de la fonction  $\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt$**

On pose :  $F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt$

$F'(x) = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$

**Somme de RIEMANN**

On pose :  $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$

et  $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + \frac{k(b-a)}{n})$ , alors les suites  $(S_n)$  et  $(s_n)$  sont convergentes et on

$a : \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \int_a^b f(x) dx$

**Intégrales de WALIS ;  $n \in \mathbb{N}$**

$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dt$

$U_0 = \frac{\pi}{2}; U_1 = 1$  et  $U_2 = \frac{\pi}{4}$

$U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$  et  $U_n U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$

$U_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$  et  $U_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} U_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

**Théorème de ROLLE :**

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$  est dérivable sur  $]a; b[$  et  $f(a) = f(b)$

alors ;  $(\exists c \in ]a; b[): f'(c) = 0$

**Théorème d'accroissement fini**

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ une fonction continue} \\ \text{sur } [a; b] \end{array} \right. \Rightarrow$   
 $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } ]a; b[ \\ (\exists c \in ]a; b[): f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \end{array} \right.$

**Inégalité d'accroissement fini**

Si  $(\forall x \in I): |f'(x)| \leq k$  alors  
 $(\forall x; y \in I): |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

**Symboles :  $\sum$  et  $\prod$**

$n \in \mathbb{N}$  et  $a_0; a_1; a_2 \dots a_n$  des nombres réels

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=n}^m k = \frac{(m-n+1)(n+m)}{2}$
- $\sum_{k=0}^n (ak + b) = \frac{(n+1)(na+2b)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=n}^m q^k = \frac{q^n - q^{m+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=1}^n kq^k = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(1-q)^2}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $\sum_{k=n}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
- $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i; j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{0 \leq x \leq n} E(x) = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n-k} = (a+b)^n$  ; (BN)
- $\sum_{k=1}^n C_n^k a^k = (a+1)^n$
- $\sum_{k=1}^n C_n^k = 2^n$
- $\sum_{k=1}^n k C_n^k = n2^{n-1}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$
- $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

**Changement d'indice :**

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p+m}^{k=n+m} a_{k-m}$$

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p-m}^{k=n-m} a_{k+m}$$

**Exemple 1 :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{p^2 - 1} = ?$$

**Astuce :**  $\frac{1}{p^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right)$

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{p=2}^n \frac{1}{p^2 - 1} \\ &= \sum_{p=2}^n \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=2}^n \frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^n \frac{1}{p+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{n+1} \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} - \sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{3}{4}$

**Exemple 2 :**

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{12} C_n^{12} \right) - 34 = \frac{1}{2} \times (2^{12}) - 34 = 2^{11} - 34 = 2048 - 34 = 2014$$

**Exemple 3 :**

$$S = \sum_{k=1}^{35} k^2 = \frac{35 \times (35+1) \times (2(35)+1)}{6} = \frac{35 \times 36 \times 71}{6} = 14910$$

**Exemple 4 :**

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

**Arithmétique**

Soit  $a$  ;  $b$  et  $c$  des entiers relatifs non nuls.

- $a/b \Rightarrow b = ka$  ;  $k \in \mathbb{Z}$
- Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$  alors  $a$  divise  $c$ .
- Si  $c$  divise  $a$  et  $b$  alors  $c$  divise  $ma + nb$  où  $m$  et  $n$  sont deux entiers relatifs.

**Nombre premier**

- Un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.
- Tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1 se décompose en produit de facteurs premiers.  
 $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$  avec  $p_1, p_2, \dots, p_r$  nombres premiers distincts et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  entiers naturels non nuls.

- Le nombre des diviseurs positifs de  $n$  est :  
 $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \dots \times (\alpha_r + 1)$

**Congruence -Fermat**

- Deux entiers  $a$  et  $b$  sont congrus modulo  $n$  lorsque  $a - b$  est divisible par  $n$   
On note  $a \equiv b[n]$ .
- $a \equiv a[n]$  pour tout entier relatif  $a$ .
- Si  $a \equiv b[n]$  et  $b \equiv c[n]$  alors  $a \equiv c[n]$
- Si  $a \equiv b[n]$  et  $a' \equiv b'[n]$  alors on a :  
➤  $a + a' \equiv b + b'[n]$  ;  $a - a' \equiv b - b'[n]$   
➤  $a \times a' \equiv b \times b'[n]$  ;  $a^p \equiv b^p[n]$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

**Fermat:**  $a \wedge b = 1$  et  $p$  premier  $\Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$

**PGCD - Gauss- Bézout:**

- Si  $b$  divise  $a$  alors  $PGCD(a ; b) = b$
- $PGCD(ka ; kb) = k \times PGCD(a ; b)$

$d = a \wedge b$  ssi  $\exists(\alpha ; \beta) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $\begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$

- Si  $a \wedge b = 1$  et  $a \wedge c = 1$  alors  $a \wedge bc = 1$
- $\forall(n ; m) \in \mathbb{N}^2$  :  $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^m = 1$
- **Gauss :**  $a \wedge b = 1$  et  $a/bc$  alors  $a/c$
- Si  $a/c$  et  $b/c$  et si  $a \wedge b = 1$  alors  $ab/c$

**Bézout:**  $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (\exists u ; v \in \mathbb{Z}) au + bv = 1$

- L'équation (E):  $ax + by = c$  possède des solutions  $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$  ssi  $a \wedge b/c$

**Matrices**

Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{21} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times x + c \times y & a \times z + c \times t \\ b \times x + d \times y & b \times z + d \times t \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = ad - cb$$

$$\det(A) = \alpha \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} = 2^n.M$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{N}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} = M$$

Dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+0+15 & 40+30+9 & 10+45+24 \\ 6+0+5 & 24+24+3 & 12+36+8 \\ 9+0+35 & 36+0+21 & 18+0+56 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = 3^{n-1}M ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = a^n.3^{n-1}M ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

➤  $\det(A) = 0 \Rightarrow A^{-1}$  n'existe pas

➤  $A \neq O ; B \neq O$  et  $A \times B = O \Rightarrow M^n = O \Rightarrow A^{-1}$  n'existe pas ;  $B^{-1}$  n'existe pas

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**Q1**

Sachant que  $11 \times 11 = 121$ , le produit  $111111111 \times 111111111$  est égale à

A	B	C	D
1234567654321	123456787654321	12345678987654321	1234568654321

**Q2**

Le nombre de diviseur positifs du nombre  $N = 546 \times 840$  est :

A	B	C	D
180	181	182	183

**Q3**

f une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . La négation de la proposition " f est la fonction nulle " est :

A	B	C	D
$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$	$\exists x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$

**Q4**

La solution de l'équation à variable réelle  $x : \ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$  est :

A	B	C	D
$\frac{1 + 7\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$

**Q5**

La valeurs maximale des termes  $u_k = C_{22}^k 20^{22-k} 21^k$  dans le développement du nombre  $(20 + 21)^{22}$  par la formule de Binôme de Newton est atteinte pour k égale à :

A	B	C	D
8	9	10	11

Q6

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} =$$

A	B	C	D
1	0	$+\infty$	$e$

Q07

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)} =$$

A	B	C	D
0	-6	6	$+\infty$

Q08

Soient a et b deux réels la fonction  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ , soit continue en 0 ssi :

A	B	C	D
$a \in \mathbb{R} \text{ et } b = 2$	$a = 0 \text{ et } b = 1$	$a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{1}{2}$	$a \in \mathbb{R} \text{ et } b = -\frac{1}{2}$

Q09

Soit f la fonction défini par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$ , la dérivée de f est :

A	B	C	D
$\frac{5x^2 - x - 12}{\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2 + x - 24}{\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2 + x - 24}{2\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$	$-\frac{3x^2 + x - 24}{3\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$

Q10

f une fonction de  $[0; +\infty[$  vers  $[0; +\infty[$  défini par  $f(x) = xe^x$ . l'équation de la tangente à la courbe  $f^{-1}$  au point d'abscisses e est

A	B	C	D
$y = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2e}x + 1$	$y = \frac{1}{2e}x - 1$

**Q11**

La valeur de  $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$  est :

A	B	C	D
$\frac{\pi}{2} + 1$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\frac{\pi}{4} - 1$	$\frac{\pi}{4} + 1$

**Q12**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$  la valeur de la valeur de  $I_4$  est :

A	B	C	D
$\frac{252}{315}$	$\frac{254}{315}$	$\frac{258}{315}$	$\frac{256}{315}$

**Q13**

$\cos \frac{\pi}{16}$  est égale à :

A	B	C	D
$\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{16} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

**Q14**

La forme algébrique du nombre  $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$  est :

A	B	C	D
$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

**Q15**

Soit le nombre complexe  $z = \sqrt{3} + i$  alors  $z^5$  est égale à :

A	B	C	D
$\bar{z}$	$-8\bar{z}$	$-16\bar{z}$	$16\bar{z}$

**Q16**

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx =$

A	B	C	D
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

**Q17**

La solution  $y(x)$  de de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0, y(0) = -4 \text{ et } y'(0) = 6$$

A	$e^{\frac{x}{2}} \left( -4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{3}{8}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$
B	$e^{\frac{x}{2}} \left( -4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{8}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$
C	$e^{\frac{x}{2}} \left( -4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$
D	$e^{\frac{x}{2}} \left( -4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$

**Q18**

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève. La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D
0,4	0,5	0,6	0,7

**Q19**

On garde les mêmes données de la question Q17. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon , la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A	B	C	D
0,25	0,35	0,45	0,55

**Q20**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan (P) d'équation cartésienne (P):  $2x - y - 2z + 2 = 0$  et la sphère (S) d'équation (S):  $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$ . Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :

A	B	C	D
$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$

**QCM 1**

<b>Sachant que <math>11 \times 11 = 121</math>, le produit <math>111111111 \times 111111111</math> est égale à</b>			
<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
1234567654321	123456787654321	12345678987654321	1234568654321

**Réponse C**

**Première méthode :**

On a :  $(111)^2 = 12321$

$$\begin{array}{r}
 111 \\
 111 \\
 \hline
 111 \\
 1111. \\
 1111. \\
 \hline
 12321
 \end{array}$$

Donc  $(111)^2 = 12321$

Le résultat est symétrique dont le centre est le nombre des chiffres en dessous du carré donc la réponse est C

**Deuxième méthode :**

On a  $111111111 \times 111111111 > 100000000 \times 100000000$

On a :  $(100000000)^2 = (10^8)^2 = 10^{16}$

On a  $10^{16}$  est un entier de 17 chiffre et comme les entiers proposés contiennent moins de 17 chiffre sauf la réponse C donc il faut cocher C

**Troisième méthode :**

On a  $111111111 \equiv 0[3]$  donc  $(111111111)^2 \equiv 0[3]$

$1234567654321 \equiv 1[3]$  et  $123456787654321 \equiv 1[3]$

$12345678987654321 \equiv 0[3]$  et  $1234568654321 \equiv 2[3]$  ; Donc il faut cocher C

**QCM2**

<b>Le nombre de diviseur positifs du nombre <math>N = 546 \times 840</math> est :</b>			
<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
180	181	182	183

**Réponse A**

La décomposition en facteurs premiers de N est  $N = 2^4 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2 \times 13^1$

Nombre de diviseurs de N est :  $(4 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 5 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 180$

f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ . La négation de la proposition " f est la fonction nulle" est :			
A	B	C	D
$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$	$\exists x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$

Réponse D

" f est la fonction nulle" donc  $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$  pour la négation il faut cocher D

QCM4

La solution de l'équation à variable réelle x : $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$ est :			
A	B	C	D
$\frac{1 + 7\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$

Réponse B

$x \in D_E \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$  et  $2x - 1 > 0$

Donc  $D_E = ]1, +\infty[$

Soit  $x \in D_E$

$\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(2(x^2 - 1)) = \ln(2x - 1)$

$\Leftrightarrow 2(x^2 - 1) = 2x - 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 12$  ; donc  $x = \frac{2 + \sqrt{12}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \in ]1, +\infty[$  ou  $x = \frac{2 - \sqrt{12}}{4} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \notin ]1, +\infty[$

QCM5

La valeurs maximale des termes $u_k = C_{22}^k 20^{22-k} 21^k$ dans le développement du nombre $(20 + 21)^{22}$ par la formule de Binôme de Newton est atteinte pour k égale à :			
A	B	C	D
8	9	10	11

Réponse B

Première méthode :

Soit  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 21, 22\}$

On a:  $u_k = C_{22}^k 20^{22-k} 21^k = 20^{22} C_{22}^k \left(\frac{21}{20}\right)^k$

On a  $C_{22}^k = C_{22}^{22-k}$  relation de symétrie

Donc  $C_{22}^0 = C_{22}^{22}$  ;  $C_{22}^1 = C_{22}^{21}$  ; ;  $C_{22}^2 = C_{22}^{20}$  .....  $C_{22}^{11} = C_{22}^{11}$  ;  $C_{22}^{12} = C_{22}^{10}$ .....

Donc la valeur maximale est atteinte pour  $C_{22}^{11}$  donc k=11

Il faut cocher D

Deuxième méthode :

Soit  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 21, 22\}$

$$\text{On a: } u_k = C_{22}^k 20^{22-k} 21^k = 20^{22} C_{22}^k \left(\frac{21}{20}\right)^k$$

On va étudier la monotonie de la suite  $(u_k)$

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= C_{22}^{k+1} 20^{21-k} 21^{k+1} - C_{22}^k 20^{22-k} 21^k \\ &= 20^{22} C_{22}^{k+1} \left(\frac{21}{20}\right)^{k+1} - 20^{22} C_{22}^k \left(\frac{21}{20}\right)^k \\ &= \frac{22-k}{k+1} C_{22}^k \left(\frac{21}{20}\right)^{k+1} - C_{22}^k \left(\frac{21}{20}\right)^k \\ &= 20^{22} C_{22}^k \left(\frac{21}{20}\right)^k \left(\frac{22-k}{k+1} \times \frac{21}{20} - 1\right) \\ &= 20^{22} C_{22}^k \left(\frac{21}{20}\right)^k \left(\frac{21(22-k) - 20(k+1)}{20(k+1)}\right) \\ &= 20^{22} C_{22}^k \left(\frac{21}{20}\right)^k \left(\frac{442 - 41k}{20(k+1)}\right) \end{aligned}$$

$$u_{k+1} - u_k \geq 0 \Rightarrow 442 - 41k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{442}{41} \approx 10, \dots$$

Donc si  $0 \leq k \leq 10$  alors la suite  $(u_k)$  est croissante

si  $11 \leq k \leq 22$  alors la suite  $(u_k)$  est décroissante

Donc La valeur maximale des termes  $u_k = C_{22}^k 20^{22-k} 21^k$  est  $u_{11}$

Q6

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} =$			
A	B	C	D
1	0	$+\infty$	$e$

Réponse A

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{n} \ln(n)} = e^0 = 1$$

Q07

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)} =$			
A	B	C	D
0	-6	6	$+\infty$

Réponse B

**Méthode 1 :**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n^2 - 12n - 35}{n + \sqrt{n^2 + 12n + 35}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(-12 - \frac{35}{n})}{n \left(1 + \sqrt{1 + \frac{12}{n} + \frac{35}{n^2}}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-12 - \frac{35}{n})}{1 + \sqrt{1 + \frac{12}{n} + \frac{35}{n^2}}} = -\frac{12}{2} = -6 \end{aligned}$$

**Méthode 2 :**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \sqrt{1 + \frac{12}{n} + \frac{35}{n^2}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(-\frac{12}{2n} - \frac{35}{2n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -6 - \frac{35}{2n} = -6 \end{aligned}$$

Remarque :  $1 - \sqrt{1+X} \sim -\frac{1}{2}X$

**Q08**

Soient a et b deux réels la fonction  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ , soit continue en 0 ssi :

A	B	C	D
$a \in \mathbb{R} \text{ et } b = 2$	$a = 0 \text{ et } b = 1$	$a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{1}{2}$	$a \in \mathbb{R} \text{ et } b = -\frac{1}{2}$

Réponse D

**Méthode 1 :**

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = b \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(1+x)^2} = b \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = b \end{aligned}$$

**Méthode 2 :**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon(x)\right)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

**NB :**  $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ , avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . (développement limité à l'ordre 2 de la fct :  $x \rightarrow \ln(1+x)$  au voisinage de 0)

$f$  continue en 0  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$ . On vient que a est quelconque

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$ , la dérivée de  $f$  est :

A	B	C	D
$\frac{5x^2 - x - 12}{\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2 + x - 24}{\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2 + x - 24}{2\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$	$-\frac{3x^2 + x - 24}{3\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$

Réponse A

Méthode 1 :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( (x-1)^{\frac{1}{2}} \times (x+2)^{-\frac{2}{3}} \times (x+3)^{-\frac{3}{2}} \right)' \\
 &= \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \times (x+2)^{-\frac{2}{3}} \times (x+3)^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{5}{3}} (x-1)^{\frac{1}{2}} \times (x+3)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x+3)^{-\frac{5}{2}} (x-1)^{\frac{1}{2}} \times (x+2)^{-\frac{2}{3}} \\
 &= (x-1)^{-\frac{1}{2}} \times (x+2)^{-\frac{5}{3}} \times (x+3)^{-\frac{5}{2}} \left[ \frac{1}{2}(x+2) \times (x+3) - \frac{2}{3}(x-1)(x+3) - \frac{3}{2}(x-1)(x+2) \right] \\
 &= \frac{(x-1)^{-\frac{1}{2}} \times (x+2)^{-\frac{5}{3}} \times (x+3)^{-\frac{5}{2}}}{6} \left[ 3(x^2 + 5x + 6) - 4(x^2 + 2x - 3) - 9(x^2 + x - 2) \right] \\
 &= \frac{(x-1)^{-\frac{1}{2}} \times (x+2)^{-\frac{5}{3}} \times (x+3)^{-\frac{5}{2}}}{6} \left[ -10x^2 - 2x + 48 \right] \\
 f'(x) &= \frac{-(5x^2 + x - 24)}{3\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}
 \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
 f^6(x) &= \frac{(x-1)^3}{(x+2)^4 (x+3)^9} \Rightarrow f^6(x) \left( (x+2)^4 (x+3)^9 \right) = (x-1)^3 \\
 &\Rightarrow \left( f^6(x) \left( (x+2)^4 (x+3)^9 \right) \right)' = \left( (x-1)^3 \right)' \\
 &\Rightarrow 6f'(x) f^5(x) \left( (x+2)^4 (x+3)^9 \right) + f^6(x) \left( (x+2)^4 (x+3)^9 \right)' = 3(x-1)^2 \\
 &\Rightarrow 6f'(x) \frac{(x-1)^3}{f(x)} + f^6(x) \left( 4(x+2)^3 (x+3)^9 + 9(x+2)^4 (x+3)^8 \right) = 3(x-1)^2 \\
 &\Rightarrow 6f'(x) \frac{(x-1)^3}{f(x)} + f^6(x) (x+2)^3 (x+3)^8 (4(x+3) + 9(x+2)) = 3(x-1)^2 \\
 &\Rightarrow 6f'(x) \frac{(x-1)^3}{f(x)} + \frac{(x-1)^3}{(x+2)(x+3)} (4(x+3) + 9(x+2)) = 3(x-1)^2 \\
 &\Rightarrow (x-1) \left[ 6f'(x) \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} (4(x+3) + 9(x+2)) \right] = 3 \\
 &\Rightarrow 6f'(x) \frac{1}{f(x)} = \frac{3}{x-1} - \frac{13x+30}{(x+2)(x+3)} = \frac{3x^2 + 15x + 18 - 13x^2 - 30x + 13x + 30}{2(x-1)(x+2)(x+3)} \\
 &\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x) \left[ (-2) \times (5x^2 + x - 24) \right]}{6(x-1)(x+2)(x+3)} = -\frac{5x^2 + x - 24}{3\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}
 \end{aligned}$$

f une fonction de  $[0; +\infty[$  vers  $[0; +\infty[$  définit par  $f(x) = xe^x$ . l'équation de la tangente à la courbe  $f^{-1}$  au point d'abscisses  $e$  est

A	B	C	D
$y = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2e}x + 1$	$y = \frac{1}{2e}x - 1$

Réponse A

$$\text{On a } (\Delta): y = \left( (f^{-1})'(e) \right) x + f^{-1}(e) - \left( (f^{-1})'(e) \right) e$$

On remarque que  $f(1) = e$ , donc  $f^{-1}(e) = 1$ . On a  $f'(x) = (1+x)e^x$ , donc  $f'(1) = 2e$

$$\text{On a : } (f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e}. \text{ Donc } (\Delta): y = \frac{1}{2e}x + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$$

**Q11**

La valeur de  $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$  est :

A	B	C	D
$\frac{\pi}{2} + 1$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\frac{\pi}{4} - 1$	$\frac{\pi}{4} + 1$

Réponse B

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \left( \frac{2}{1+x^2} - 1 \right) dx = \left[ 2 \operatorname{Arctan}(x) - x \right]_0^1 \\ &= 2 \operatorname{Arctan}(1) - 1 = 2 \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

**Q12**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$  la valeur de la valeur de  $I_4$  est :

A	B	C	D
$\frac{252}{315}$	$\frac{254}{315}$	$\frac{258}{315}$	$\frac{256}{315}$

Réponse D

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^4 dx = 2 \int_0^1 ((x^2)^4 - 4(x^2)^3 + 6(x^2)^2 - 4(x^2) + 1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1) dx = 2 \left[ \frac{1}{9}x^9 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \left[ \frac{1}{9} - \frac{4}{7} + \frac{6}{5} - \frac{4}{3} + 1 \right] = 2 \left[ \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} \right] = 2 \times \frac{128}{315} = \frac{256}{315} \end{aligned}$$

$\cos \frac{\pi}{16}$  est égale à :

A	B	C	D
$\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{16} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

Réponse D

On a :  $\left( \forall \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \right) \cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}}$ , donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Q14

La forme algébrique du nombre  $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$  est :

A	B	C	D
$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Réponse A

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3 \times 674 + 1} = e^{i(674\pi)} e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 \times e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Q15

Soit le nombre complexe  $z = \sqrt{3} + i$  alors  $z^5$  est égale à :

A	B	C	D
$\bar{z}$	$-8\bar{z}$	$-16\bar{z}$	$16\bar{z}$

Réponse A

$$\begin{aligned} z^5 &= (\sqrt{3} + i)^5 = \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)^5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5 = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2^5 e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= 2^5 e^{i\pi} e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -2^4 \left(2e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right) = -16\bar{z} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx =$$

A	B	C	D
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

Réponse B

Calculons l'intégrale :  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$

On pose  $x = \sin(t)$  donc  $dx = \cos(t)dt$

Pour  $x=0$  on a :  $\sin t=0$  donc  $t=0$

Pour  $x = 1$  on a  $\sin(t) = 1$  donc  $t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \quad ; \quad \cos t \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[ x + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

**Q17**

La solution  $y(x)$  de de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0, y(0) = -4 \text{ et } y'(0) = 6$$

A	$e^{\frac{x}{2}} \left( -4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{3}{8}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$
B	$e^{\frac{x}{2}} \left( -4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{8}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$
C	$e^{\frac{x}{2}} \left( -4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$
D	$e^{\frac{x}{2}} \left( -4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$

Réponse D

$$\text{On a : } \Delta = -9 = (3i)^2, r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{3}{2} \text{ et } r_2 = \bar{r}_1$$

$$\text{Donc } y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbf{R}) y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left( \alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right) / (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbf{R}) y'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left( -\frac{1}{2} \left( \alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right) + \left( -\frac{3}{2} \alpha \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2} \beta \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \right) \right)$$

Donc

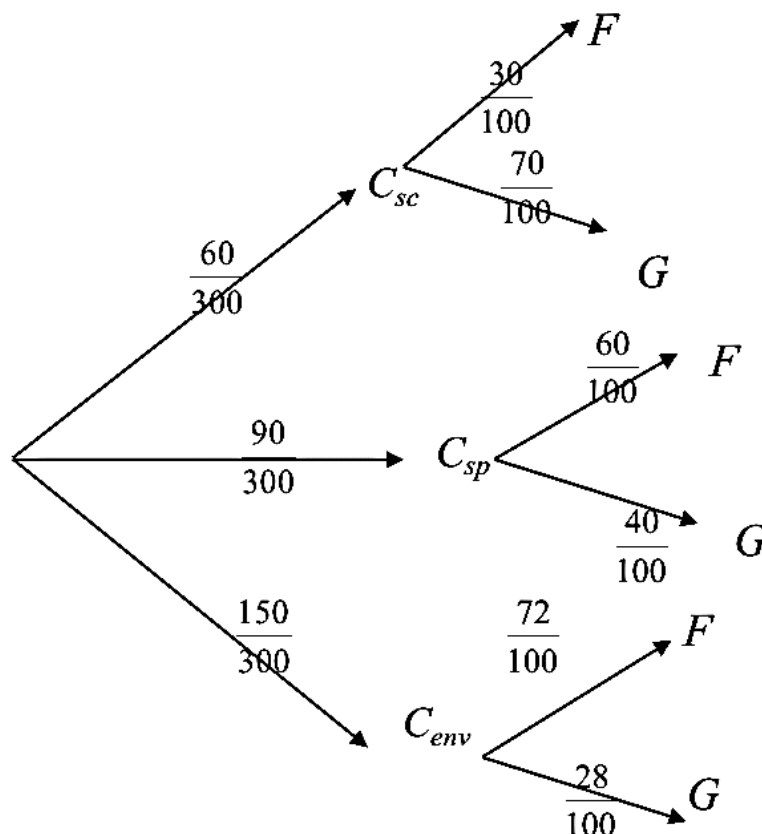
$$\begin{aligned} (y(0) = -4 \text{ et } y'(0) = 6) &\Leftrightarrow \left( \alpha = -4 \text{ et } \frac{-\alpha + 3\beta}{2} = 6 \right) \\ &\Leftrightarrow \left( \alpha = -4 \text{ et } \beta = \frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

**Q18**

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève. La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D	E
0,4	0,5	0,6	0,7	Autre réponse

Réponse C



$$\text{On a : } P(F) = P(C_{sc})P_{C_{sc}}(F) + P(C_{sp})P_{C_{sp}}(F) + P(C_{env})P_{C_{env}}(F) \text{ (Formule des probabilités totales)}$$

$$= \frac{60}{300} \times \frac{30}{100} + \frac{90}{300} \times \frac{60}{100} + \frac{150}{300} \times \frac{72}{100} = \frac{18000 + 54000 + 108000}{300 \times 100} = \frac{180}{300} = \frac{3}{5} = 0,6$$

On garde les mêmes données de la question Q17. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon, la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A	B	C	D	E
0,25	0,35	0,45	0,55	Autre réponse

Réponse B

$$P_G(C_{env}) = \frac{P(G \cap C_{env})}{P(G)} = \frac{P(C_{env}) \times P_{C_{env}}(G)}{P(G)} = \frac{150 \times \frac{28}{100}}{0,4} = \frac{4200}{300 \times 100} = \frac{4200}{30000} = \frac{420}{3000} = \frac{42}{300} = \frac{7}{50} = 0,14$$

( Signalons que  $P(G) = 1 - P(F)$  )

**Q20**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan (P) d'équation cartésienne (P):  $2x - y - 2z + 2 = 0$  et la sphère (S) d'équation

(S):  $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$ . Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :

A	B	C	D
$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Réponse A

On a (S):  $(x-3)^2 + (y-0)^2 + (z+5)^2 = 6^2$ , donc (S) =  $S(\Omega(3,0,-5), 6)$

$\vec{n}(2,-1,-2)$  est un vecteur normal au plan (P).

Comme (D) est la droite passant par  $\Omega(3,0,-5)$  et de vecteur directeur

$\vec{n}(2,-1,-2)$  alors l'une de ses représentations paramétriques est celle proposée dans (A)

**Fin du sujet**

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

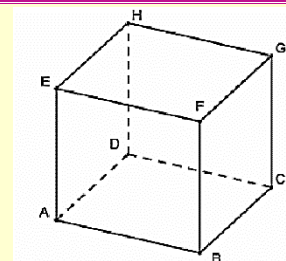
**QCM1**

On choisit au hasard un nombre de 0 à 999  
La probabilité qu'au moins un de ses chiffres soit strictement supérieur à 5 est :

A	B	C	D
$\frac{789}{1000}$	$\frac{8}{250}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{784}{1000}$

**QCM2**

On coupe un cube ABCDEFGH de côté 6 cm selon le plan (BEG)  
On obtient le tétraèdre BEFG  
La mesure de la hauteur du tétraèdre relative à la base BEG est :



A	B	C	D
36	$\sqrt{\frac{4}{3}}$	$2\sqrt{3}$	$18\sqrt{3}$

**QCM3**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^{2024} + 2023} - x^{1012}$$

A	B	C	D
0	1	$+\infty$	N'admet pas de limite

**QCM4**

L'intégrale  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^6 \sin(x) dx$  est égale à :

A	B	C	D
0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1

**QCM5**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$   
Soient ABCD un tétraèdre tels que  $A(1; 2; 3)$ ;  $B(2; 1; 3)$ ;  $C(2; -2; 0)$  et  $D(1; 1; 4)$   
La mesure de la hauteur du tétraèdre ABCD relative à la base ABC est :

A	B	C	D
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$

**QCM 6 :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} =$$

A	B	C	D
0	1	$\ln(2)$	N'admet pas de limite

**QCM 7 :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

L'ensemble des points M d'affixe z tel que  $\left| \frac{z-i}{z-1} \right| = 2$  est :

A	Le cercle de diamètre [EF] tel que : $z_E = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ et $z_F = 2 - i$
B	Le cercle de diamètre [EF] tel que : $z_E = i$ et $z_F = 1$ privé de points F
C	La droite (EF) tel que : $z_E = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ et $z_F = 2 - i$
D	Le cercle de centre $z_E = i$ est de rayon 2

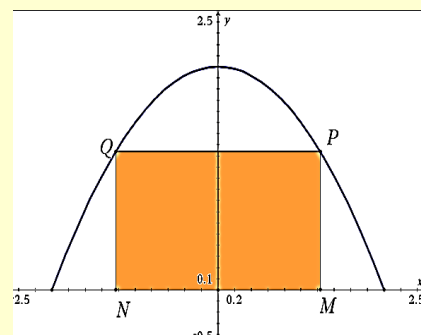
**QCM 8 :**

Soit f la fonction définit sur  $I = [0; 2]$  par  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

Son graphe est la parabole ci-contre

Pour tout  $x \in [0; 2]$  on construit à partir du point M(x ; 0) les points P ; Q et N , avec P et Q sur la parabole et MNQP un rectangle

La valeur de x pour que l'aire de MNQP soit maximale est :



A	B	C	D
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

**QCM 09**

Pour tout entier naturel n non nul on pose :  $I_n = n \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$  . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n =$

A	B	C	D
e	$e^2$	$+\infty$	Autre

**QCM10**

On pose  $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  . Alors  $1 + j + j^2 + \dots + j^{2023}$  est égale à

A	B	C	D
j	0	1	Autre réponse

**QCM11**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 9^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} \right) =$$

A	B	C	D
$\ln(2)$	$\ln(3)$	$+\infty$	E

**QCM12 :**

On veut construire un triangle ABC isocèle en A tel que  $AB = AC = 10$

Alors l'aire maximale de ce triangle est :

A	B	C	D
100	50	25	150

**QCM13**

Soit  $\alpha \in ]1; +\infty[$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{\alpha}(1+x)}{x} =$

A	B	C	D
$\alpha$	$\frac{1}{\ln(2)}$	$\ln(2)$	1

**QCM 14**

L'intégrale  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx$  est égale à :

A	B	C	D
0	1	$-\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	Autre réponse

**QCM15**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $n$  un entier naturel fixé :

Soient les points  $A(n; 4; 0)$  ;  $B(-n; 0; 0)$  ;  $C(-n; 4; 3)$  et  $D(n; 0; -3)$

Pour tout  $n$  on a les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point H

Les coordonnées du point de contact H sont :

A	B	C	D
$(0; -n; 2)$	$(0; 2; 0)$	$(n; 0; 0)$	$(0; 2n; -2)$

**QCM16**

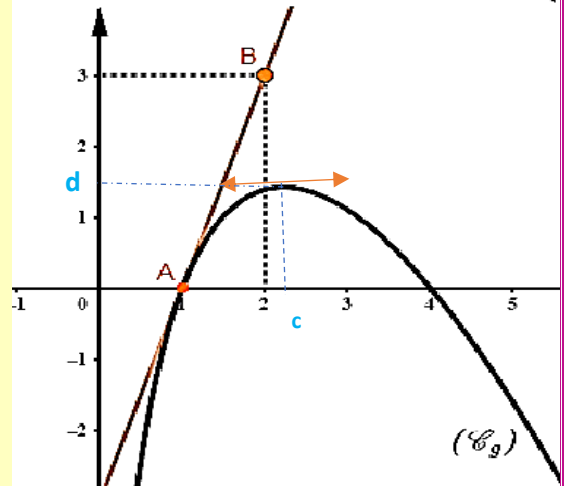
Soit  $f$  la fonction définie par sa courbe ci-contre :

On considère que  $f$  s'écrit de la façon suivante :

$$f(x) = (ax + b)\ln(x), \text{ avec } a \text{ et } b \text{ sont des réels}$$

La droite  $(AB)$  est la tangente à  $(C_f)$  au point  $A(1; 0)$

La valeur de  $a$  et  $b$  est :



A	B	C	D
$a = 1$ $b = -2$	$a = -1$ $b = 4$	$a = -2$ $b = 1$	$a = -1$ $b = 1$

**QCM17**

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$	$f'(1) = 0$	$f^{-1}$ est non dérivable en $d$	$f'(c) = d$

**QCM18**

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D
$\int_1^5 f(x) dx \leq 0$	$\forall x \in [1; 4]: f(x) > 0$	$\forall x \in [1; 4]: f'(x) > 0$	$\forall x \in [1; 4]: f''(x) < 0$

**QCM19**

Dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $3iz - \bar{z} = 8i$  est :

A	B	C	D	E
$\{3 - 2i\}$	$\{3 + i\}$	$\{3 - i\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

**QCM 20 :**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul on pose :  $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1} dx$ .

Alors  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : I_{n+1} + I_n$  égal à :

A	B	C	D
$e + n$	$\frac{e^n - 1}{n + 1}$	$\frac{e^n - 1}{n}$	Autre réponse

### Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

### QCM1

On choisit au hasard un nombre de 0 à 999

La probabilité qu'au moins un de ses chiffres soit strictement supérieur à 5 est :

A	B	C	D
$\frac{789}{1000}$	$\frac{8}{250}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{784}{1000}$

La réponse juste est D

### Première méthode :

Le nombre de possibilités de choix d'un entier à trois chiffres est  $10^3 = 1000$

Le nombre de possibilités de choix d'un entier dont tous les chiffres inférieurs à 5 est  $6^3 = 216$  (Il y a 216 entiers compris entre 000 et 999 dont tous les chiffres inférieurs à 5)

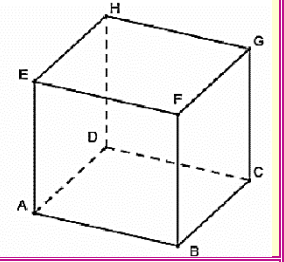
Donc par complémentarité 784 entiers dont au moins un des chiffres est strictement supérieur à 5

D'où la probabilité cherchée est  $\frac{784}{1000}$

### Deuxième méthode :

On peut remarquer que le nombre des chiffres strictement supérieurs à 5 dans l'écriture d'un entier à trois chiffres suit la loi binomiale de paramètre  $n=3$  et  $p=0,4$

On coupe un cube ABCDEFGH de côté 6 cm selon le plan (BEG)  
 On obtient le tétraèdre BEFG  
 La mesure de la hauteur du tétraèdre relative à la base BEG est :



A	B	C	D
36	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$18\sqrt{3}$

**Première méthode :**

Soit le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

On a  $B(6; 0; 0)$  ;  $E(0; 0; 6)$  ;  $G(6; 6; 6)$  ;  $D(0; 6; 0)$  et  $F(6,0,6)$

On a  $\overrightarrow{DF}(6; -6; 6)$  est normal au plan (BEG) donc  $\frac{1}{6}\overrightarrow{DF}(1; -1; 1)$  est normal au (BEG)

Donc l'équation cartésienne du pla (BEG) est  $x - y + z - 6 = 0$

$$h = d(F; (BEG)) = \frac{|6 + 6 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

**Remarque :** on peut trouver h d'une autre manière en effet :

Une représentation paramétrique de (D) la hauteur passant par F est  $\begin{cases} x = t + 6 \\ y = -t \\ z = t + 6 \end{cases}$

Donc  $(t + 6) + t + (t + 6) - 6 = 0$  donc  $t = -2$

D'où les coordonnées de H l'intersection de (D) et (BEG) est  $\begin{cases} x = -2 + 6 = 4 \\ y = 2 \\ z = -2 + 6 = 4 \end{cases}$

Donc  $H(4; 2; 4)$  donc  $\overrightarrow{HF}(2; 2; 2)$  donc  $h = HF = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$

**Deuxième méthode :**

On a le triangle BEG est un triangle équilatéral de de coté  $6\sqrt{6}$

L'aire de ce triangle est égale à  $(6\sqrt{6})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$

Si h est la longueur de la hauteur issue de F de BEFG alors  $\frac{1}{3} \times h \times 18\sqrt{3} = 36$  donc  $h = 2\sqrt{3}$

**QCM3**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^{2024} + 2023} - x^{1012}$			
A	B	C	D
0	1	$+\infty$	N'admet pas de limite

**La réponse juste est A**

**Première méthode :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^{2024} + 2023} - x^{1012} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2024} + 2023 - (x^{1012})^2}{\sqrt{x^{2024} + 2023} + x^{1012}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2023}{\sqrt{x^{2024} + 2023} + x^{1012}} = 0$$

**Deuxième méthode :**

**Astuce**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^{2\alpha} + \beta} - x^\alpha = 0$  ;  $\alpha > 0$

L'intégrale  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^6 \sin(x) dx$  est égale à :

A	B	C	D
0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1

La réponse juste est A

Première méthode :

Astuce *f est impaire*  $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$

On a  $f \mapsto x^6 \sin(x)$  est impaire donc  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^6 \sin(x) dx = 0$

Deuxième méthode :

Intégration par partie six fois !!!!!

QCM5

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient ABCD un tétraèdre tels que  $A(1; 2; 3)$ ;  $B(2; 1; 3)$ ;  $C(2; -2; 0)$  et  $D(1; 1; 4)$

La mesure de la hauteur du tétraèdre ABCD relative à la base ABC est :

A	B	C	D
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$

La réponse juste est C

On a  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ , donc

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

Soit  $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a le vecteur  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$  est normale au plan  $(ABC)$

Donc  $(ABC): 3 \times x + 3 \times y - 3 \times z + d = 0$  est une équation cartésienne de  $(ABC)$

Donc  $(ABC): 3x + 3y - 3z + d = 0$

Et on a  $A(1; 2; 3) \in (ABC)$  donc on remplace les coordonnées de A donc  $1 \times 3 + 3 \times 2 - 3 \times 3 + d = 0$  donc  $0 + d = 0$  donc  $d = 0$

D'où  $(ABC): 3x + 3y - 3z = 0$  ; Donc  $(ABC): x + y - z = 0$

On a  $(ABC): x + y - z = 0$  et  $D(1; 1; 4)$  donc :

$$h = d(D; (ABC)) = \frac{|1 + 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} =$$

A	B	C	D
0	1	$\ln(2)$	N'admet pas de limite

La réponse juste est C

Limite classique :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$

QCM 7 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

L'ensemble des points M d'affixe z tel que  $\left| \frac{z-i}{z-1} \right| = 2$  est :

A	Le cercle de diamètre [EF] tel que : $z_E = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ et $z_F = 2 - i$
B	Le cercle de diamètre [EF] tel que : $z_E = i$ et $z_F = 1$ privé de points F
C	La droite (EF) tel que : $z_E = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ et $z_F = 2 - i$
D	Le cercle de centre $z_E = i$ est de rayon 2

La réponse juste est A

**Astuce :** l'ensemble des points M d'affixe z tel que  $\left| \frac{z-z_A}{z-z_B} \right| = R$  est un cercle de diamètre [EF] tel que :  $z_E = \frac{z_A+Rz_B}{1+R} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$  et  $z_F = \frac{z_A-Rz_B}{1-R} = 2 - i$

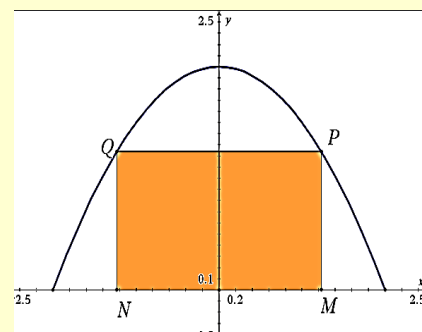
QCM8 :

Soit f la fonction définie sur  $I = [0; 2]$  par  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

Son graphe est la parabole ci-contre

Pour tout  $x \in [0; 2]$  on construit à partir du point M(x ; 0) les points P ; Q et N , avec P et Q sur la parabole et MNQP un rectangle

La valeur de x pour que l'aire de MNQP soit maximale est :



A	B	C	D
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

La réponse juste est C

Soit  $x \in [0; 2]$

L'aire de MNQP est  $A(x) = 2xf(x) = 4x - x^3$

Donc  $A'(x) = 4 - 3x^2$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in [0; 2]$$

Pour tout entier naturel  $n$  non nul on pose :  $I_n = n \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$ .

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n =$

A	B	C	D
$e$	$e^2$	$+\infty$	Autre

La réponse juste est A

Astuce :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1) = e$

QCM10

On pose  $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Alors  $1 + j + j^2 + \dots + j^{2023}$  est égale à

A	B	C	D
$j$	0	1	Autre réponse

La réponse juste est D

On sait que :  $z^3 = 1 \Leftrightarrow z = 1$  ou  $z = j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{i2\pi}{3}}$  ou  $z = \bar{j} = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1 + j + \bar{j} = 0$  et  $j^3 = 1$ ;  $j^{3k} = 1$ ;  $j^{3k+1} = j$   $j^{3k+2} = \bar{j} = j^2$

$1 + j + j^2 + \dots + j^{2023} = 1 + j + j^2 + \dots + j^{2023}$

$$= \frac{j^{2024} - 1}{j - 1} = \frac{j^{2022+2} - 1}{j - 1} = \frac{j^2 - 1}{j - 1} = \frac{\bar{j} - 1}{j - 1}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3 + i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})}{9 + 3} = \frac{9 + 6\sqrt{3}i - 3}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Autre méthode de calcul :

$$\frac{j^2 - 1}{j - 1} = \frac{(j - 1)(j + 1)}{j - 1} = j + 1$$

$$= -\bar{j} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ car } 1 + j + \bar{j} = 0$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 9^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} \right) =$			
A	B	C	D
$\ln(2)$	$\ln(3)$	$+\infty$	E

La réponse juste est B

*Astuce:*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} \right) = \ln \left( \frac{a}{b} \right)$ ;  $a > 0$  et  $b > 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 9^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} \right) = \ln \left( \frac{9}{3} \right) = \ln(3)$

**QCM12 :**

On veut construire un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = AC = 10$			
Alors l'aire maximale de ce triangle est :			
A	B	C	D
100	50	25	150

La réponse juste est B

Par exemple on choisit comme paramètre une mesure  $x$  en radians de l'angle orienté  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Pour raison de symétrie il suffit que  $x$  décrive l'intervalle  $[0; \pi]$

L'aire de ABC s'exprime en fonction de  $x$  par :  $A(x) = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin x = 50 \sin x$

Elle est maximale lorsque  $\sin x$  est maximal donc  $x = \frac{\pi}{2}$  donc  $A(x) = 50 \sin \frac{\pi}{2} = 50$

**Remarque:** Quant  $x = \frac{\pi}{2}$ , l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  est alors un angle droit donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

**QCM13**

Soit $\alpha \in ]1; +\infty[$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{\alpha}(1+x)}{x} =$			
A	B	C	D
$\alpha$	$\frac{1}{\ln(\alpha)}$	$\ln(\alpha)$	1

La réponse juste est B

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{\alpha}(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln(\alpha)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{\ln(\alpha)} \\ &= \frac{1}{\ln(\alpha)}, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \end{aligned}$$

L'intégrale  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx$  est égale à :

A	B	C	D
0	1	$-\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	Autre réponse

**La réponse juste est C**

Astuce classique :  $\int \frac{1}{\sin(x)} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$  et  $\int \frac{1}{\cos(x)} = -\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx = \left[ \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|\tan\frac{\pi}{6}\right| = 0 - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

**QCM15**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $n$  un entier naturel :

Soient les points  $A(n; 4; 0)$  ;  $B(-n; 0; 0)$  ;  $C(-n; 4; 3)$  et  $D(n; 0; -3)$

Pour tout  $n$  on a les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont sécantes en un point  $H$

Les coordonnées du point de contact  $H$  sont :

A	B	C	D
$(0; -n; 2)$	$(0; 2; 0)$	$(n; 0; 0)$	$(0; 2n; -2)$

**La réponse juste est B**

On a pour tout  $n$  les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont sécantes en un point  $H$

On a  $(AB)$  :  $\begin{cases} x = n - 2nt \\ y = 4 - 4t \\ z = 0 + 0t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$  et  $(CD)$  :  $\begin{cases} x = -n + 2nt' \\ y = 4 - 4t' \\ z = 3 - 6t' \end{cases} ; (t' \in \mathbb{R})$

Donc  $H$  vérifie le système suivant :  $\begin{cases} n - 2nt = -n + 2nt' \\ 4 - 4t = 4 - 4t' \\ 0 = 3 - 6t' \end{cases}$  donc  $\begin{cases} 2n - 2n(t + t') = 0 \\ t = t' \\ t' = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc  $\begin{cases} 2n - 2n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ t = \frac{1}{2} \\ t' = \frac{1}{2} \end{cases}$  Donc  $\begin{cases} 0 = 0 \\ t = \frac{1}{2} \\ t' = \frac{1}{2} \end{cases}$

On remplace  $t = \frac{1}{2}$  dans a représentation paramétrique de  $(AB)$  ou bien  $(CD)$  on trouve

$\begin{cases} x = n - 2n \times \frac{1}{2} \\ y = 4 - 4 \times \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$  donc  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

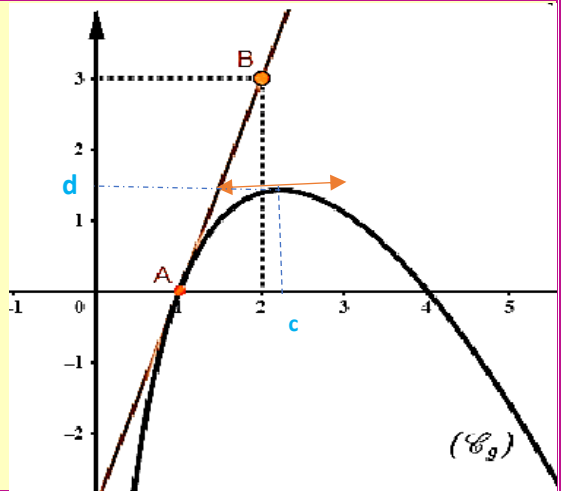
Soit  $f$  la fonction définie par sa courbe ci-contre :

On considère que  $f$  s'écrit de la façon suivante :

$$f(x) = (ax + b)\ln(x), \text{ avec } a \text{ et } b \text{ sont des réels}$$

La droite  $(AB)$  est la tangente à  $(C_f)$  au point  $A(1; 0)$

La valeur de  $a$  et  $b$  est :



A	B	C	D
$a = 1$	$a = -1$	$a = -2$	$a = -1$
$b = -2$	$b = 4$	$b = 1$	$b = 1$

**La réponse juste est B**

On a  $f(4) = (4a + b)\ln(4)$  et graphiquement on a  $f(4) = 0$

Donc  $(4a + b)\ln(4) = 0$  donc  $4a + b = 0$

Et on a  $(\forall x \in ]0; +\infty[); f'(x) = a(\ln x + 1) + \frac{b}{x}$  donc  $f'(1) = a(\ln 1 + 1) + \frac{b}{1} = a + b$

Et graphiquement on a  $f'(1) = \frac{3-0}{2-1} = 3$  donc  $a + b = 3$

$$\text{Donc } \begin{cases} 4a + b = 0 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ a = 3 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(3 - b) + b = 0 \\ a = 3 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 3b = 0 \\ a = 3 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 3 - b = -1 \end{cases}$$

D'où  $a = -1$  et  $b = 4$

**QCM17**

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$	$f'(1) = 0$	$f^{-1}$ est non dérivable en d	$f'(c) = d$

**La réponse juste est C**

D'après le graphe on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  ;  $f'(1) = 3$  et  $f'(c) = 0$  donc la réponse juste est C

**QCM18**

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D
$\int_1^4 f(x)dx \leq 0$	$\forall x \in [1; 4]: f(x) < 0$	$\forall x \in [1; 4]: f'(x) > 0$	$\forall x \in [1; 4]: f''(x) < 0$

**La réponse juste est D**

D'après le graphe on a A)  $\int_1^4 f(x)dx \geq 0$  ; B)  $\forall x \in [1; 4]: f(x) \geq 0$

C) La fonction  $f$  n'est pas monotone sur  $[1; 4]$  ; D)  $\forall x \in [1; 4]: f''(x) < 0$

Dans $\mathbb{C}$ , l'ensemble des solutions de l'équation $3iz - \bar{z} = 8i$ est :				
A	B	C	D	E
$\{3 - 2i\}$	$\{3 + i\}$	$\{3 - i\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

**La réponse juste est C**

**1ère méthode :**

On remplace les solutions données on trouve que  $3 - i$  est la réponse juste

**2ème méthode :**

$z$  un élément de  $\mathbb{C}$ , on pose  $z = x + iy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
 3iz - \bar{z} = 8i &\Leftrightarrow 3i(x + iy) - x + iy = 8i \\
 &\Leftrightarrow 3ix - 3y - x + iy - 8i = 0 \\
 &\Leftrightarrow -3y - x + (3x + y - 8)i = 0 \\
 &\Leftrightarrow -3y - x = 0 \text{ et } (3x + y - 8) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } 3 \times -3y + y - 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } (-8y - 8) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } y = -1 \\
 &\Leftrightarrow x = 3 \text{ et } y = -1 \\
 &\Leftrightarrow z = 3 - i
 \end{aligned}$$

Donc  $S = \{3 - i\}$

**QCM 20 :**

Pour tout entier naturel $n$ non nul on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^{x+1}} dx$ .			
Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : I_{n+1} + I_n$ égal à :			
A	B	C	D
$e + n$	$\frac{e^n - 1}{n + 1}$	$\frac{e^n - 1}{n}$	Autre réponse

**La réponse juste est C**

Astuce : Par intégration partie on montre que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : I_{n+1} + I_n = \frac{e^n - 1}{n}$$

**Fin de sujet**

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**Q1**

Dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $\frac{2z-1}{z+1} = z$  est :

A	B	C	D	E
$\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$	$\{1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$	$\left\{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

**Q2**

Si  $f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 4y = 0$  alors  $g = 2f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

A	B	C	D	E
$y'' + 2y' + 4y = 0$	$y'' + y' + y = 0$	$y'' + 4y' + 4y = 0$	$2y'' + 4y' + y = 0$	Autre

**Q3**

Si  $z = e^{ix} - e^{-ix}$  avec  $x \in ]0; \pi[$ , alors  $|z|$  est égale à :

A	B	C	D	E
2	$2\cos x$	$2\cos \frac{x}{2}$	$2\sin x$	$2\sin \frac{x}{2}$

**Q4**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n}$  est égale à :

A	B	C	D	E
$-\infty$	0	1/2	1	Autre réponse

**Q5**

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $\arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$  et  $|z| = \sqrt{2}$  alors la partie imaginaires de  $z^3$  est :

A	B	C	D	E
0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

Q6

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points  $A(1; 2; 3)$  et  $B(2; 0; 1)$ .

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  équidistants des points A et B est

A	B	C	D	E
Le plan $x - y + z = 6$	Le plan $2x - 4y - 4z = -9$	Le plan $2x - 4y - 4z = 9$	La droite : $x + y + z = 6$ et $2x - 4y - 4z = -9$	Autre

Q7

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Si  $\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1} dx = \frac{1}{a}$  alors a est égal à :

A	B	C	D	E
$\ln(e - 1)$	$2e - 1$	$\ln(2e + 1)$	$\ln(2e - 1)$	$2e + 1$

Q8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soit  $z$  un nombre complexe et  $\Omega, M$  et  $M'$  les points d'affixes respectivement  $-\frac{\sqrt{3}}{3}, z$  et  $z'$  tel que :  $z' = (1 + i\sqrt{3})z + i$ , alors une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'})$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Q9

ABCD est un carré de coté 1.

On place les points E et F respectivement sur les coté  $[AB]$  ET  $[BC]$  tels que  $BE = CF = x$

La valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :

A	B	C	D	E
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Q10

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $|z| - z = 3 - i\sqrt{3}$  alors  $|z|$  est égale à :

A	B	C	D	E
0	2	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$

**Q11**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $-i$  et  $i$

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $\left| \frac{iz-1}{\bar{z}+i} \right| = 1$  est :

A	B	C	D	E
La médiatrice du $[AB]$	La droite $(AB)$	La droite $(AB)$ privé du point B	Le cercle de diamètre $[AB]$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

**Q12**

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022$  alors  $x$  est égal à :

A	B	C	D	E
$\frac{29}{7} \ln 2022$	$2022 \ln \frac{7}{29}$	$2022 \ln \frac{29}{7}$	$\frac{7}{29} \ln 2022$	Autre réponse

**Q13**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan (P) d'équation  $3x - 2z + 3 = 0$

On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6

On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre  $a$  ( $1 \leq a \leq 6$ )

La probabilité que le point  $A(a^2; 2a; 6a - 3)$  appartient au plan (P) est .

A	B	C	D	E
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	Autre réponse

**Q14**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2e^{3x} - 6$

La primitive de la fonction sur  $\mathbb{R}$  dont la courbe coupe l'axe des ordonnées en 3 est définie par :

A	B	C	D	E
$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x - \frac{2}{3}$	$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x + \frac{7}{3}$	$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x - \frac{7}{3}$	$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x + \frac{2}{3}$	Autre réponse

**Q15**

L'intégrale  $\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

**Q16**

Si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite telle que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n$

Alors :

A	B	C	D	E
$v_8 = 31$	$v_8 = 53$	$v_8 = 54$	$v_8 = 62$	$v_8 = 64$

**Q17**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(2x - 1) = x^2 + 3x$

Alors  $f(1) + f'(1)$  est égale à

A	B	C	D	E
$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	Autre réponse

**Q18**

Si pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ .

Alors  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 2I_{n+1} + (n+1)I_n$  égal à :

A	B	C	D	E
$e$	$e^2$	1	$\frac{e-1}{2}$	$\frac{e+1}{2}$

**Q19**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

Et (C) sa courbe dans un repère orthonormé

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

A	B	C	D
$y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{n^2-1}{2}$

**Q20**

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 \in ]0; 1[$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$

Où  $f$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$ .

On a alors :

A	B	C	D	E
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	Autre réponse

Q1

Dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $\frac{2z-1}{z+1} = z$  est :

A	B	C	D	E
$\{-1; \frac{1}{2}\}$	$\{1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$	$\left\{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Réponse C :

$$\frac{2z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow 2z-1 = z^2 + z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Q2

Si  $f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 4y = 0$  alors  $g = 2f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

A	B	C	D	E
$y'' + 2y' + 4y = 0$	$y'' + y' + y = 0$	$y'' + 4y' + 4y = 0$	$2y'' + 4y' + y = 0$	Autre

Réponse A :

$f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 4y = 0$

Donc  $f''(x) + 2f'(x) + 4f(x) = 0$  donc  $2f''(x) + 2 \times 2f'(x) + 2 \times 4f(x) = 0$

Donc  $(2f)''(x) + 2 \times (2f)'(x) + 4 \times (2f)(x) = 0$  donc  $g''(x) + 2 \times g'(x) + 4g(x) = 0$

Alors  $g = 2f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :  $y'' + 2y' + 4y = 0$

Q3

Si  $z = e^{ix} - e^{-ix}$  avec  $x \in ]0; \pi[$ , alors  $|z|$  est égale à :

A	B	C	D	E
2	$2\cos x$	$2 \cos \frac{x}{2}$	$2 \sin x$	$2 \sin \frac{x}{2}$

Réponse D :

$$\text{On a } z = e^{ix} - e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x) - (\cos(x) + i\sin(x))$$

$$= -2i \sin(x)$$

Et on a  $x \in ]0; \pi[$  alors  $\sin(x) \geq 0$  d'où  $|z| = 2 \sin(x)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n}$  est égale à :

A	B	C	D	E
$-\infty$	0	1/2	1	Autre réponse

**Réponse C :**

**Première méthode :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

**Deuxième méthode**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - (n^2 - n)}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Q5**

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $\arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$  et  $|z| = \sqrt{2}$  alors la partie imaginaires de  $z^3$  est :

A	B	C	D	E
0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

**Réponse A :**

$$\arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi] \Rightarrow \arg(i) + \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{4\pi}{6} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

Et on a  $|z| = \sqrt{2}$  donc  $z = \sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Donc  $z^3 = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3$

Donc  $z^3 = 2\sqrt{2} e^{i2\pi} = 2\sqrt{2} e^0 = 2\sqrt{2}$

Donc  $\text{Im}(z^3) = 0$

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points  $A(1; 2; 3)$  et  $B(2; 0; 1)$ .

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  équidistants des points A et B est

A	B	C	D	E
Le plan $x - y + z = 6$	Le plan $2x - 4y - 4z = -9$	Le plan $2x - 4y - 4z = 9$	La droite : $x + y + z = 6$ et $2x - 4y - 4z = -9$	Autre

### Réponse B :

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  équidistants des points A et B est le plan (P) médiateur au segment  $[AB]$

Donc le plan (P) passe par le milieu du segment  $[AB]$  le point  $I(\frac{3}{2}; 1; 2)$  est de vecteur normal  $\overrightarrow{AB}(1 - 2; -2)$  donc (P):  $x - 2y - 2z + d = 0$  et  $I(\frac{3}{2}; 1; 2) \in (P)$

Donc  $\frac{3}{2} - 2 - 4 + d = 0$  donc  $-\frac{9}{2} + d$  donc  $d = \frac{9}{2}$

D'où (P):  $x - 2y - 2z + \frac{9}{2} = 0$  donc (P):  $2x - 4y - 4z = -9$

### Q7

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Si  $\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1} dx = \frac{1}{a}$  alors a est égal à :

A	t	C	D	E
$\ln(e - 1)$	$2e - 1$	$\ln(2e + 1)$	$\ln(2e - 1)$	$2e + 1$

### Réponse D :

$$\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1} dx = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{ae^{ax}}{e^{ax}+1} dx = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{ae^{ax}}{e^{ax}+1} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(e^{ax}+1)'}{e^{ax}+1} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow [\ln(|e^{ax}+1|)]_0^1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^a+1) - \ln(2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^a+1}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^a+1}{2} = e \Leftrightarrow e^a+1 = 2e$$

$$\Leftrightarrow e^a = 2e - 1$$

$$\Leftrightarrow a = \ln(2e - 1)$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soit  $z$  un nombre complexe et  $\Omega, M$  et  $M'$  les points d'affixes respectivement  $-\frac{\sqrt{3}}{3}, z$  et  $z'$  tel que :  $z' = (1 + i\sqrt{3})z + i$ , alors une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'})$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Réponse B :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(\Omega M; \Omega M')} &\equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{(1 + i\sqrt{3})z + i + \frac{\sqrt{3}}{3}}{z + \frac{\sqrt{3}}{3}}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{(1 + i\sqrt{3})\left(z + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}(1 + i\sqrt{3}) + i + \frac{\sqrt{3}}{3}}{z + \frac{\sqrt{3}}{3}}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(1 + i\sqrt{3} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3i}{3} + i + \frac{\sqrt{3}}{3}}{z + \frac{\sqrt{3}}{3}}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(1 + i\sqrt{3})[2\pi] \equiv \arg\left(2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{\pi}{3}\right)[2\pi] \end{aligned}$$

Q9

ABCD est un carré de coté 1.

On place les points E et F respectivement sur les coté [AB] et [BC] tels que  $BE = CF = x$

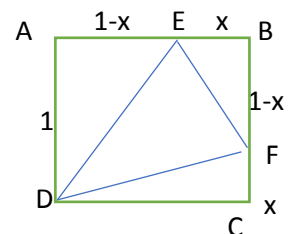
La valeur de  $x$  pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :

A	B	C	D	E
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Réponse D :

On a :  $S_{EFD} = S_{ABCD} - S_{AED} - S_{BEF} - S_{CFD}$

$$\begin{aligned} &= (1 \times 1) - \frac{1 \times (1-x)}{2} - \frac{x \times (1-x)}{2} - \frac{1 \times x}{2} \\ &= 1 - \frac{1-x}{2} - \frac{x-x^2}{2} - \frac{x}{2} = \frac{2-1+x-x+x^2-x}{2} \\ &= \frac{x^2-x+1}{2} = \frac{x^2-2 \times \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}{2} = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{2} \geq \frac{\frac{3}{4}}{2} \geq \frac{3}{8} \end{aligned}$$



Donc pour  $x = \frac{1}{2}$  on obtient l'air minimale de  $EFD$  qui est  $\frac{3}{8}$

**Remarque :** On peut dresser le tableau de variation de  $S(x) = \frac{x^2-x+1}{2}$  sur  $[0; 1]$  et on trouve que  $S$  admet une valeur minimale en  $\frac{1}{2}$

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $|z| - z = 3 - i\sqrt{3}$  alors  $|z|$  est égale à :

A	B	C	D	E
0	2	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$

Réponse B :

Soit  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$

$$|z| - z = 3 - i\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 3 - i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} = 3 + x \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3 = 3^2 + 6x + x^2 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 9 = 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = -6 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow z = -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = 2$$

Q11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $-i$  et  $i$

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $\left| \frac{iz-1}{\bar{z}+i} \right| = 1$  est :

A	B	C	D	E
La médiatrice du $[AB]$	La droite $(AB)$	La droite $(AB)$ privé du point B	Le cercle de diamètre $[AB]$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Réponse A :

$$\left| \frac{iz-1}{\bar{z}+i} \right| = 1 \Rightarrow |iz-1| = |\bar{z}+i|$$

$$\Rightarrow |iz+i^2| = |\overline{z-i}|$$

$$\Rightarrow |i||z+i| = |z-i|$$

$$\Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Rightarrow MA = MB$$

Donc L'ensemble des points  $M$  est La médiatrice du segment  $[AB]$

Q12

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022$  alors  $x$  est égal à :

A	B	C	D	E
$\frac{29}{7} \ln 2022$	$2022 \ln \frac{7}{29}$	$2022 \ln \frac{29}{7}$	$\frac{7}{29} \ln 2022$	Autre réponse

Réponse D :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022 \Rightarrow e^{\frac{29}{7}x} = 2022 \Rightarrow \frac{29}{7}x = \ln(2022) \Rightarrow x = \frac{7}{29} \ln(2022)$$

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan (P) d'équation  $3x - 2z + 3 = 0$

On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6

On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre  $a$  ( $1 \leq a \leq 6$ )

La probabilité que le point  $A(a^2; 2a; 6a - 3)$  appartient au plan (P) est .

A	B	C	D	E
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	Autre réponse

Réponse B :

$$\begin{aligned}
 A(a^2; 2a; 6a - 3) \in (P) &\Leftrightarrow 3x_A - 2z_A + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3a^2 - 2(6a - 3) + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3a^2 - 12a + 9 = 0 \\
 &\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = 3
 \end{aligned}$$

Donc La probabilité que le point  $A(a^2; 2a; 6a - 3)$  appartient au plan (P) est  $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Q14

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2e^{3x} - 6$

La primitive de la fonction sur  $\mathbb{R}$  dont la courbe coupe l'axe des ordonnées en 3 est définie par :

A	B	C	D	E
$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x - \frac{2}{3}$	$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x + \frac{7}{3}$	$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x - \frac{7}{3}$	$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x + \frac{2}{3}$	Autre réponse

Réponse B :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2e^{3x} - 6$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x + c$$

On a la courbe de F coupe l'axe des ordonnées en 3 donc  $F(0) = 3$

$$F(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}e^0 - 6 \times 0 + c = 3$$

$$\Leftrightarrow c = 3 - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{7}{3}$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x + \frac{7}{3}$$

L'intégrale  $\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}} dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

Réponse C :

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}} dx &= \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{3x^2+6}{2\sqrt{x^3+6x+4}} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{(x^3+6x+4)'}{2\sqrt{x^3+6x+4}} dx \\ &= \frac{2}{3} \left[ \sqrt{x^3+6x+4} \right]_0^3 = \frac{2}{3} (\sqrt{27+18+4} - \sqrt{4}) \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{49} - 2) = \frac{2}{3} (7 - 2) = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Q16

Si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite telle que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n$ . Alors :

A	B	C	D	E
$v_8 = 31$	$v_8 = 53$	$v_8 = 54$	$v_8 = 62$	$v_8 = 64$

Réponse A :

On a  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n$  ; (L1)

Donc :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \dots + v_n + v_{n+1} = 2(n+1)^2 + n+1$  ; (L2)

Donc :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 2(n+1)^2 + (n+1) - 2n^2 - n$  ; (L2 - L1)

Donc :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 + n + 1 - 2n^2 - n = 4n + 3$

Donc :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 4n + 3$

Donc : on prend  $n = 7$  on trouve  $v_8 = (4 \times 7) + 3 = 31$

Q17

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(2x-1) = x^2 + 3x$

Alors  $f(1) + f'(1)$  est égale à

A	B	C	D	E
$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	Autre réponse

Réponse D :

On a  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(2x-1) = x^2 + 3x$  donc pour  $x = 1$  on trouve  $f(1) = 4$

Et on a  $f(2x-1) = x^2 + 3x$  donc  $(2x-1)' f'(2x-1) = 2x + 3$

Donc  $2f'(2x-1) = 2x + 3$ , donc pour  $x = 1$  on trouve  $2f'(1) = 5$  donc  $f'(1) = \frac{5}{2}$

D'où  $f(1) + f'(1) = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$

Si pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ .

Alors ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) :  $2I_{n+1} + (n+1)I_n$  égal à :

A	B	C	D	E
$e$	$e^2$	1	$\frac{e-1}{2}$	$\frac{e+1}{2}$

Réponse B :

On a  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$  donc  $I_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx$

Posons  $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = x \end{cases}$  alors  $\begin{cases} u'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Il s'ensuit donc :  $I_{n+1} = \left[ \frac{x^2}{2} (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n \times \frac{x^2}{2} dx$

Donc  $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{n+1}{2} \int_1^e x(\ln x)^n dx$  donc  $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

Donc  $2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n$  donc  $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$

Q19

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

Et (C) sa courbe dans un repère orthonormé

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

A	B	C	D
$y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{n^2-1}{2}$

Réponse A :

On a  $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

Donc  $f(1) = 1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^n = n + 1$

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

Donc  $f'(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

(T):  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Donc (T):  $y = \frac{n(n+1)}{2}(x-1) + (n+1)$

Donc (T):  $y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$

Donc (T):  $y = \frac{n(n+1)}{2}x - \left( \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2(n+1)}{2} \right)$

Donc (T):  $y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 \in ]0; 1[$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$

Où  $f$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$

On a alors :

A	B	C	D	E
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	Autre réponse

Réponse E :

Soit  $x \in ]0; 1[$

On a  $\sqrt{x} < \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$  donc  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} < 1$  donc  $0 < f(x) < 1$  donc  $f(]0; 1[) \subset ]0; 1[$

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} - x = \frac{\sqrt{x} - x(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}))}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}(1 - x - \sqrt{x}\sqrt{1-x})}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{1-x}^2 - \sqrt{x}\sqrt{1-x})}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x} - \sqrt{x})}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}(1 - x - x)}{(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}(1 - 2x)}{(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) - x = 0 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}(1 - 2x)}{(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{x})} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{1-x}(1 - 2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} = 0 \text{ ou } (1 - 2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Remarquer que le signe de  $f(x) - x$  est le signe de  $1 - 2x$

• Donc si  $x = u_0 < \frac{1}{2}$  donc  $1 - 2x > 0$  donc  $f(x) - x > 0$  donc  $(u_n)$  est croissante

On montre par récurrence facilement que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < \frac{1}{2}$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

• Si  $x = u_0 > \frac{1}{2}$  donc  $1 - 2x < 0$  donc  $f(x) - x < 0$  donc  $(u_n)$  est décroissante

On montre par récurrence facilement que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \frac{1}{2}$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

• Si  $x = u_0 = \frac{1}{2}$  donc  $1 - 2x = 0$  donc  $f(x) - x = 0$  donc  $(u_n)$  est constante

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**Q1**

$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\ln(e+x)} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{e}$	1	$e$	$2e$

**Q2**

$f(x) = \frac{1}{1-x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ alors $f'(x)$ est égale à :			
A	B	C	D
$\frac{1}{(1-x)^2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x(1-x)^2}$	$\frac{1}{(1-x)^2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1-x)^2}$	$\frac{1}{1-x^2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1-x)^2}$	$\frac{1}{(1-x)^2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1-x)^2}$

**Q3**

Le nombre complexe $\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$i$	$-1$	$7 - 15i$	$-i$	$7 + 15i$

**Q4**

Si $x \in ]0; 1[$ , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n)$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	1	$-\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+x}$

**Q5**

Dans $\mathbb{R}$ , le nombre de solution de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ est :				
A	B	C	D	E
0	1	2	3	5

**Q6**

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $|z|\bar{z} = 15 - 20i$  alors  $|(1+i)z|$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$

**Q7**

Si  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}$  alors :

A	B	C	D	E
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$	La fonction $f$ n'admet pas de limite en 0

**Q8**

$(u_n)$  est une suite telle que :  $v_0 = 1$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = u_n^2 + u_n$

Alors la limite de la suite  $(u_n)$  si elle existe, est égale à :

A	B	C	D	E
1	$+\infty$	0	-1	Autre valeur

**Q9**

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx$  est égal à :

A	B	C	D	E
$\sqrt{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$	$\ln\sqrt{1+e}$	$\ln(1+e)$	$\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$	$\sqrt{\ln(1+e)}$

**Q10**

Si  $f(1) = 4$  est  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) = 2x + \ln x$  alors  $f(e)$  est égale à :

A	B	C	D	E
$e^2$	$e + 4$	$e^2 + 4$	$e$	4

**Q11**

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $z = 1 + i(1 + \sqrt{2})$  alors :

A	B	C	D
$ z  = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$	$ z  = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$	$ z  = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$	$ z  = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$

**Q12**

Si  $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$  et  $f'(2) - f'(1) = 2$  alors  $f'(2) + f'(1)$  égal à :

A	B	C	D	E
4	6	8	10	12

**Q13**

Soit  $q \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} q^k$$

Si la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 4$  alors  $q$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

**Q14**

L'intégrale  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$  est égal à :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$

**Q15**

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $|z_1| = |z_2| = 1$  et  $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$  alors  $|z_1 - z_2|$  est égale à :

A	B	C	D	E
1	3	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{2}$

**Q16**

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite telle que :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \sqrt{\frac{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}{2}}$$

Alors la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est égale à :

A	B	C	D	E
0	$+\infty$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Q17**

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction  $f$  est dérivable en 0 si et seulement si :

A	B	C	D	E
$a = 1$ et $b = 1$	$a = -1$ et $b = 1$	$a = 2$ et $b = 1$	$a = -1$ et $b = -1$	$a = -1$ et $b = 0$

**Q18**

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Si  $\int_{-1}^1 f(x)dx < 2$  alors le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = 0$  est

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

**Q19**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$

Soient  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation d'inconnue  $z$

$$(E): z^2 - \sin(2\alpha)z + \sin^2(\alpha) = 0$$

La valeur de  $\alpha$  pour laquelle les points  $O, M(z_1)$  et  $M'(z_2)$  sont les sommets d'un triangle équilatéral est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

**Q20**

Pour tout entier naturel non nul  $n$  et pour tout réel  $x$  on pose :

$$f_n(x) = e^{-x} - nx$$

Alors on a :

A	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in ]0; 1[ : f(\alpha_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 1$
B	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in ]0; 1[ : f(\alpha_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 0$
C	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in ]0; 1[ : f(\alpha_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = e$
D	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in ]-1; 0[ : f(\alpha_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 0$
E	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in ]-1; 0[ : f(\alpha_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 1$

Q1

$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\ln(e+x)} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{e}$	1	e	2e

Réponse B :

$$\text{On a : } l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln e + \ln\left(1 + \frac{x}{e}\right) - 1}{\frac{\sqrt{\ln(e+x)} + 1}{x + 1 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{e}\right)}{\frac{x}{e}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{\ln(e+x)} + 1} = \frac{1}{e} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{e}$$

Q2

$f(x) = \frac{1}{1-x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  alors  $f'(x)$  est égale à :

A	B	C	D
$\frac{1}{(1-x)^2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x(1-x)^2}$	$\frac{1}{(1-x)^2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1-x)^2}$	$\frac{1}{1-x^2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1-x)^2}$	$\frac{1}{(1-x)^2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1-x)^2}$

Réponse B :

On a :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1-x} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1-x)^2}$$

Q3

Le nombre complexe  $\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}$  est égale à :

A	B	C	D	E
i	-1	7 - 15i	-i	7 + 15i

Réponse D :

En remarquant que  $7-15i = -i(15+7i)$  on obtient :  $z = (-i)^{2021} = \left((-i)^2\right)^{1010} (-i) = -i$

Si  $x \in ]0; 1[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n)$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	1	$-\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+x}$

Réponse E :

$$\text{On a : } 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} \quad (q = -x)$$

$$\text{Comme } x \in ]0, 1[ \text{ alors } -x \in ]-1, 0[, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-x)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-x)^n (-x) = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

Q5

Dans  $\mathbb{R}$ , le nombre de solution de l'équation  $x^3 + x - 1 = 0$  est :

A	B	C	D	E
0	1	2	3	5

Réponse B :

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = x^5 + x + 1$ .

On a  $f$  dérivable ( donc continue ) sur  $\mathbf{R}$  et on a :  $(\forall x \in \mathbf{R}) f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ .

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ , donc elle réalise une bijection de  $\mathbf{R}$  vers  $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$  et comme  $0 \in f(\mathbf{R})$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet 1 solution dans  $\mathbf{R}$ .

Q6

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $|z|\bar{z} = 15 - 20i$  alors  $|(1+i)z|$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$

Réponse E :

$$|z|\bar{z} = 15 - 20i \Leftrightarrow |z| \operatorname{Re}(z) - i|z| \operatorname{Im}(z) = 15 - 20i$$

$$\Leftrightarrow |z| \operatorname{Re}(z) = 15 \quad \boxed{1} \text{ et } |z| \operatorname{Im}(z) = 20 \quad \boxed{2}$$

$$\Rightarrow |z|^2 \left[ (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \right] = 625 = 25^2 \quad \boxed{1}^2 + \boxed{2}^2$$

$$\Rightarrow |z|^2 \cdot |z|^2 = 5^4$$

$$\Rightarrow |z| = 5$$

$$\Rightarrow |(1+i)z| = 5\sqrt{2} \quad (\text{car } |1+i| = \sqrt{2})$$

Si  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}$  alors :

A	B	C	D	E
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$	La fonction $f$ n'admet pas de limite en 0

Réponse E :

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}} = 1$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}} = -1$$

Comme les deux limites sont différentes alors la fonction  $f$  n'admet pas de limite en 0.

Q8

$(u_n)$  est une suite telle que :  $v_0 = 1$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = u_n^2 + u_n$

Alors la limite de la suite  $(u_n)$  si elle existe, est égale à :

A	B	C	D	E
1	$+\infty$	0	-1	Autre valeur

Réponse B :

Remarquons qu'on peut démontrer aisément par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq 1$ .

Comme  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$  alors la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

Donc  $(u_n)$  converge vers un réel  $l$  ou diverge vers  $+\infty$ .

Si on suppose que  $(u_n)$  est Cv alors d'après la relation :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ , on en déduit que  $l = l^2 + l$ , et on aura  $l = 0$ , ce qui contredit le fait que  $l \geq 1$ , puisque  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq 1$ . Donc on a nécessairement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Q9

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx$  est égal à :

A	B	C	D	E
$\sqrt{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$	$\ln\sqrt{1+e}$	$\ln(1+e)$	$\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$	$\sqrt{\ln(1+e)}$

Réponse D :

$$\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(e^{x^2}+1)'}{e^{x^2}+1} dx = \frac{1}{2} \left[ \ln(e^{x^2}+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln(e+1) - \ln 2) = \ln \sqrt{\frac{e+1}{2}}$$

Q10

Si  $f(1) = 4$  est ( $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ) :  $f'(x) = 2x + \ln x$  alors  $f(e)$  est égale à :

A	B	C	D	E
$e^2$	$e + 4$	$e^2 + 4$	$e$	4

Réponse C :

Comme ( $\forall x \in ]0, +\infty[$ )  $f'(x) = 2x + \ln x$  alors ( $\forall x \in ]0, +\infty[$ )  $f(x) = x^2 + x \ln x - x + cste$   
 Et comme  $f(1) = 4$  alors  $cste = 4$  et par suite  $f(e) = e^2 + 4$

Q11

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $z = 1 + i(1 + \sqrt{2})$  alors :

A	B	C	D
$ z  = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}$ et $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$	$ z  = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$	$ z  = 2\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{8}$ et $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$	$ z  = 2\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{8}$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$

Réponse A :

$$z = 1 + i + \sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \left( e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{2}} \right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{2} e^{i\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}{2}} = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

Et comme  $2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} > 0$  (car  $\frac{\pi}{8} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) alors  $|z| = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}$  et  $\arg z \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$ .

Q12

Si  $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$  et  $f'(2) - f'(1) = 2$  alors  $f'(2) + f'(1)$  égal à :

A	B	C	D	E
4	6	8	10	12

Réponse C :

Rappel :  $\int_1^2 (g(x))' g(x) dx = \left[ \frac{1}{2} (g(x))^2 \right]_1^2$  donc pour  $g(x) = f'(x)$  on a :

$$\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_1^2 (f'(x))' f'(x)dx = 8 \Leftrightarrow \left[ \frac{1}{2} (f'(x))^2 \right]_1^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( (f'(2))^2 - (f'(1))^2 \right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( (f'(2) + f'(1))(f'(2) - f'(1)) \right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( (f'(2) + f'(1)) \times 2 \right) = 8 \quad \text{car } f'(2) - f'(1) = 2$$

$$\Leftrightarrow f'(2) + f'(1) = 8$$

## Q13

Soit  $q \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} q^k$$

Si la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 4$  alors  $q$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

Réponse C :

Comme  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente alors nécessairement  $q \neq 1$  (car si non

$\sum_{k=1}^n q^k = n$  et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  serait divergente) et comme  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n q^k = q \frac{1-q^n}{1-q}$  et

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  Cv, alors nécessairement  $|q| < 1$  et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{q}{1-q}$ ,

puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ . D'où  $\frac{q}{1-q} = 4$ , et par suite  $q = \frac{4}{5}$ .

## Q14

L'intégrale  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$  est égal à :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$

Réponse E :

Considérons l'intégrale  $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ . On a :

$$I + J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1 dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
 J - I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx = \left[ \ln(\sin x + \cos x) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \ln\left(\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0
 \end{aligned}$$

Et par suite  $I = J = \frac{\pi}{12}$

## Q15

Dans  $\mathbb{C}$ , si  $|z_1| = |z_2| = 1$  et  $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$  alors  $|z_1 - z_2|$  est égale à :

A	B	C	D	E
1	3	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{2}$

Réponse A :

On a :  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$ , donc  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{2}$  et comme

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \text{ alors } |z_1 - z_2|^2 = 1 + 1 - 1 = 1$$

D'où :  $|z_1 - z_2| = 1$

## Q16

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite telle que :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \sqrt{\frac{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}{2}}$$

Alors la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est égale à :

A	B	C	D	E
0	$+\infty$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Réponse B :

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \sqrt{\frac{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}{2}} \Leftrightarrow u_n^2 = \frac{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}{2}$$

Donc la suite  $(u_n^2)$  est arithmétique de raison  $r = u_1^2 - u_0^2 = 1$

D'où  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n^2 = u_0^2 + nr = n$ , donc  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \sqrt{n}$

Et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Soit  $a; b \in \mathbb{R}$  et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} ax + b & , \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{ si } x > 0 \end{cases}$

La fonction  $f$  est dérivable en 0 si et seulement si :

A	B	C	D	E
$a = 1$ et $b = 1$	$a = -1$ et $b = 1$	$a = 2$ et $b = 1$	$a = -1$ et $b = -1$	$a = -1$ et $b = 0$

Réponse B :

$$f \text{ dérivable en } 0 \Rightarrow f \text{ continue en } 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow b = 1$$

$$f \text{ dérivable en } 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow a = -1$$

**Q18 :** Soit  $a; b \in \mathbb{R}$  et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Si  $\int_{-1}^1 f(x) dx < 2$  alors le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = 0$  est

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

Réponse C :

Le discriminant de l'équation  $3x^2 + 2ax + b = 0$  est  $\Delta = 4(a^2 - 3b)$ .

$$\text{On a : } \int_{-1}^1 f(x) dx < 2 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (3x^2 + 2ax + b) dx < 2 \Leftrightarrow [x^3 + ax^2 + bx]_{-1}^1 < 2 \Leftrightarrow 2 + 2b < 0 \Leftrightarrow b < -1$$

D'où  $\Delta > 0$ , et par suite l'équation  $f(x) = 0$  admet 2 solutions distinctes dans  $\mathbb{R}$ .

**Q19 :** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$

Soient  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation d'inconnue  $z : (E) : z^2 - \sin(2\alpha)z + \sin^2(\alpha) = 0$

La valeur de  $\alpha$  pour laquelle les points  $O, M(z_1)$  et  $M'(z_2)$  sont les sommets d'un triangle équilatéral est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

Réponse D :

$$z^2 - \sin(2\alpha)z + \sin^2(\alpha) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)z + \sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha)(1 - \cos^2(\alpha))$$

$$\Leftrightarrow (z - \sin\alpha\cos\alpha)^2 = -\sin^4\alpha = (i\sin^2\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow z = \sin\alpha(\cos\alpha \pm i\sin\alpha) = \sin\alpha e^{\pm i\alpha}$$

Prenons,  $z_1 = \sin\alpha e^{i\alpha}$  et  $z_2 = \sin\alpha e^{-i\alpha}$

$$OM_1M_2 \text{ équilatéral} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow e^{i(2\alpha)} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Pour tout entier naturel non nul  $n$  et pour tout réel  $x$  on pose :

$$f_n(x) = e^{-x} - nx$$

Alors on a :

A	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in ]0; 1[ : f(\alpha_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 1$
B	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in ]0; 1[ : f(\alpha_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 0$
C	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in ]0; 1[ : f(\alpha_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = e$
D	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in ]-1; 0[ : f(\alpha_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 0$
E	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in ]-1; 0[ : f(\alpha_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 1$

Réponse A :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est dérivable (donc continue) sur  $\mathbf{R}$  et on a :

$(\forall x \in \mathbf{R}) f'_n(x) = -e^{-x} - n < 0$ , donc  $f_n$  est strictement décroissante sur  $\mathbf{R}$ .

Donc elle réalise une bijection de  $\mathbf{R}$  vers  $f_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ . (puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ ). Et comme  $0 \in f_n(\mathbf{R})$  alors  $(\exists! a_n \in \mathbf{R}) : f_n(a_n) = 0$ .

On a :  $f_n(0) = 1 > 0$ ,  $f_n(a_n) = 0$  et  $f_n(1) = \frac{1-ne}{e} < 0$ . Donc :  $f_n(1) < f_n(a_n) < f_n(0)$

Et comme  $f_n$  est strictement décroissante sur  $\mathbf{R}$  alors  $0 < a_n < 1$ .

On a :  $f_n(a_n) - f_{n+1}(a_n) = a_n > 0$ , donc  $f_{n+1}(a_n) < f_n(a_n) = 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$

Et comme  $f_n$  est strictement décroissante sur  $\mathbf{R}$ , alors  $a_{n+1} < a_n$ , donc

la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est strictement décroissante, et comme elle est minorée (par

0) alors elle est convergente. Si on pose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$  alors on a  $l = 0$  ou  $0 < l < 1$

Et comme  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{e^{-a_n}}{a_n} = n$  alors nécessairement  $l = 0$ , car si non, nous

aurons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \frac{e^{-l}}{l} \in \mathbf{R}$ , ce qui contredit le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ .

Comme  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) e^{-a_n} = na_n$  et la fonction :  $x \rightarrow e^{-x}$  est continue en 0, alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-a_n} = e^0 = 1$ .

Fin de sujet :

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q 1 – Si  $z$  est le nombre complexe de module  $\sqrt{2}$  et d'argument  $\frac{\pi}{3}$ , alors  $z^8$  est égal à :

- A**  $8 + i8\sqrt{3}$       **B**  $-8 + i8\sqrt{3}$       **C**  $-8 - i8\sqrt{3}$       **D**  $8 - i8\sqrt{3}$       **E**  $4 + i4\sqrt{3}$

Q 2 – Si  $\theta$  est un nombre réel, alors  $\cos^3 \theta$  est égal à :

- A**  $\frac{1}{8}(\cos 3\theta + 3 \cos \theta)$       **C**  $\frac{1}{4}(\sin 3\theta + 3 \sin \theta)$       **E**  $\frac{1}{8}(\sin 3\theta + 3 \sin \theta)$   
**B**  $\frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3 \cos \theta)$       **D**  $\frac{1}{8}(3 \cos \theta - \cos 3\theta)$

Q 3 – Si  $x \in ]0; 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x)^n (1+x)^n$  est égal à :

- A**  $+\infty$       **B**  $-\infty$       **C**  $0$       **D**  $-1$       **E**  $1$

Q 4 – Le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  est :

- A**  $] -\infty; -1[ \cup ] 0; +\infty[$       **C**  $] -\infty; -1[ \cup ] 1; +\infty[$       **E**  $] -1; 1[$   
**B**  $] -1; 1[ \cup ] 1; +\infty[$       **D**  $] -\infty; -1[ \cup ] 0; 1[ \cup ] 1; +\infty[$

Q 5 – Si  $f(x) = (x^2 - x) e^{\frac{1}{x}}$ , alors  $f'(x)$  est égale à :

- A**  $(2x-1) e^{\frac{1}{x}}$       **C**  $\left(\frac{1}{x}-1\right) e^{\frac{1}{x}}$       **D**  $\left(2x-2+\frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$       **E**  $\left(2x-\frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$   
**B**  $\left(1-\frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

Q 6 – Si  $z$  est un nombre complexe tel que :  $\arg(z-1) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$  et  $\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ , alors  $z$  est égal à :

- A**  $\sqrt{3}i$       **B**  $2\sqrt{3}i$       **C**  $-\sqrt{3}i$       **D**  $-2\sqrt{3}i$       **E**  $1 + \sqrt{3}i$

Q 7 – Si  $z = 1 + e^{i\frac{\theta}{2}}$  où  $\theta \in ]-\pi; \pi[$ , alors  $|z|$  est égal à :

**A** 2

**B**  $2 \cos \frac{\theta}{2}$

**C**  $2 \cos \frac{\theta + \pi}{4}$

**D**  $\cos \frac{\theta + \pi}{4}$

**E**  $2 \cos \frac{\theta}{4}$

Q 8 – On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{2n}$  est égale à :

**A** 0

**B**  $e^{-4}$

**C**  $e^4$

**D**  $e$

**E** 1

Q 9 – Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique de premier terme  $u_1 = 2$  et de raison  $q = \frac{1}{3}$ , alors le produit  $u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$  ( $n \leq 1$ ) est égal à :

**A**  $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

**B**  $\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

**C**  $\frac{2^n}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

**D**  $2^n \cdot 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

**E**  $\frac{1}{2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

Q 10 – Si  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$ , alors  $f'(1)$  est égal à :

**A** 24

**B** 1

**C** 0

**D** 5

**E** -24

Q 11 – Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{2 \ln x}{x(1 + (\ln x)^2)}$ .

La primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1 est :

**A**  $\ln((\ln x)^2 + 1)$

**C**  $2 \ln((\ln x)^2 + 1)$

**D**  $\frac{x \ln x}{\ln x + 1}$

**E**  $\frac{2 \ln x}{(\ln x)^2 + 1}$

**B**  $(\ln x)^2$

Q 12 – L'intégrale  $\int_0^1 \frac{2t+3}{t+2} dt$  est égale à :

**A**  $\ln \frac{3}{2}$

**B**  $2 + \ln \frac{3}{2}$

**C**  $2 - \ln \frac{2}{3}$

**D**  $2 + \ln \frac{2}{3}$

**E**  $\ln \frac{2}{3}$

**Q 13** – Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que :  $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$  est :

- A** L'axe des réels privé du point  $O$ .
- B** Le cercle de centre  $O$  et de rayon 1
- C** L'axe des réels privé des points  $A(-1)$  et  $B(1)$
- D** Le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 privé des points  $A(-1)$  et  $B(1)$
- E** L'axe des réels privé du point  $O$  union le cercle de centre  $O$  et de rayon 1

**Q 14** – Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $w_0 = \frac{1}{2}$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}); w_{n+1} = (w_n - 1)^2 + 1$ .  
Si  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$  est égale à :

- A** 0
- B** 2
- C** 1
- D**  $\frac{1}{2}$
- E** -1

**Q 15** – Soit  $a \in ]0; +\infty[$  et  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = 1 + x \ln\left(\sqrt{1 + \frac{a}{x}}\right)$ ,  
alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  est égale à :

- A** 1
- B**  $1 + \frac{a}{x}$
- C**  $1 + a$
- D**  $+\infty$
- E**  $a$

**Q 16** – Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$  tel que :  $AB = AC = 10$ .

L'aire maximale du triangle  $ABC$  est :

- A**  $25 \frac{\sqrt{2}}{2}$
- B** 50
- C** 100
- D** 10
- E**  $5\sqrt{2}$

Q 17 – Si  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f(x) = x^3 + 3 \ln x + 1$ , alors le nombre dérivé  $(f^{-1})'(2)$  est égal à :

**A**  $\frac{\sqrt{1}}{3}$

**B**  $\frac{1}{6}$

**C**  $\frac{1}{5}$

**D**  $\frac{1}{4}$

**E**  $\frac{1}{2}$

Q 18 – L'intégrale  $\int_0^1 \sin(x)e^x dx$  est égale à :

**A**  $\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

**B**  $\frac{e+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

**C**  $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

**D**  $1+e^{\frac{\pi}{2}}$

**E**  $1-e^{\frac{\pi}{2}}$

Q 19 – On considère la fonction  $f$  définie :  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

Un encadrement de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[0; 1]$  est :

**A**  $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$

**B**  $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq 0$

**C**  $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

**E**  $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{2}$

**D**  $0 \leq f'(x) \leq \sqrt{2}$

Q 20 – Soit  $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels.

$f$  admet une limite finie en  $+\infty$  si et seulement si :

**A**  $a > 0$  et  $b > 0$

**B**  $a = 1$  et  $b > 0$

**C**  $a = 1$  et  $b = 2$

**D**  $a = 1$  et  $b = 0$

**E**  $a > 0$  et  $b = 0$

Q 1 – Si  $z$  est le nombre complexe de module  $\sqrt{2}$  et d'argument  $\frac{\pi}{3}$ , alors  $z^8$  est égal à :

- A**  $8 + i8\sqrt{3}$       **B**  $-8 + i8\sqrt{3}$       **C**  $-8 - i8\sqrt{3}$       **D**  $8 - i8\sqrt{3}$       **E**  $4 + i4\sqrt{3}$

Réponse B :

Première méthode :

$$z^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i\frac{8\pi}{3}} = 16e^{i2\pi} e^{i\frac{2\pi}{3}} = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -8 + i8\sqrt{3}$$

Deuxième méthode :

On a :  $|z| = \sqrt{2}$  et  $\arg z \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ , alors  $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$   
donc :

$$\begin{aligned} z^8 &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^8 \\ &= \sqrt{2}^8 e^{i\frac{8\pi}{3}} \\ &= \left(\sqrt{2}^2\right)^4 \left[\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right] \\ &= 2^4 \left[\cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2^4 \left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] \\ &= 2^4 \left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2^4 \left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2^4 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -8 + i8\sqrt{3} \end{aligned}$$

Remarque

- $\cos(2\pi + x) = \cos x$
- $\sin(2\pi + x) = \sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$

Q 2 – Si  $\theta$  est un nombre réel, alors  $\cos^3 \theta$  est égal à :

- A**  $\frac{1}{8}(\cos 3\theta + 3\cos \theta)$       **C**  $\frac{1}{4}(\sin 3\theta + 3\sin \theta)$       **E**  $\frac{1}{8}(\sin 3\theta + 3\sin \theta)$   
**B**  $\frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos \theta)$       **D**  $\frac{1}{8}(3\cos \theta - \cos 3\theta)$

## Réponse B :

Première méthode :

Comme la formule correcte est valable pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ , il suffit de faire une simple vérification pour une valeur particulière de  $\theta$ .

Choisissons, par exemple, 0 pour  $\theta$ , on a dans ce cas  $\cos^3 \theta = \cos^3 0 = 1$ .

Et en remplaçant  $\theta$  par 0 dans chacune des formules proposées on constate que la seule qui nous donne la valeur 1 c'est le B

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} \left[ (e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} (e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3 \right] \\ &= \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i2\theta} e^{-i\theta} + 3e^{-i2\theta} e^{i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{e^{i3\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + 3 \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta) \end{aligned}$$

## Remarque

Les relations d'Euler :

$$\bullet \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\bullet \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Q 3 – Si  $x \in ]0;1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x)^n (1+x)^n$  est égal à :

**A**  $+\infty$

**B**  $-\infty$

**C** 0

**D** -1

**E** 1

## Réponse C :

Première méthode :

Si  $x \in ]0,1[$  alors  $0 < 1-x < 1$  et  $1+x > 1$  et dans ce cas le calcul direct aboutit à une forme indéterminée.

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x)^n (1+x)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((1-x)(1+x))^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x^2)^n = 0$ , car  $0 < 1-x^2 < 1$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x)^n (1+x)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [(1-x)(1+x)]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x^2)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x \in ]0; 1[ &\Rightarrow 0 < x < 1 \\
 &\Rightarrow 0 < x^2 < 1 \\
 &\Rightarrow -1 < -x^2 < 0 \\
 &\Rightarrow 0 < 1 - x^2 < 1 \\
 &\Rightarrow 1 - x^2 \in ]0; 1[
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \text{ si } -1 < q < 1$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x)^n (1+x)^n = 0$  (car  $-1 < 1-x^2 < 1$ )

**Q 4** – Le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  est :

- A**  $] -\infty; -1[ \cup ] 0; +\infty[$      
  **C**  $] -\infty; -1[ \cup ] 1; +\infty[$      
  **E**  $] -1; 1[$   
 **B**  $] -1; 1[ \cup ] 1; +\infty[$      
  **D**  $] -\infty; -1[ \cup ] 0; 1[ \cup ] 1; +\infty[$

**Réponse D :**

**Première méthode :**

On a :  $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 1$  et  $x \neq 0$  et  $1 + \frac{1}{x} > 0$ .

Et comme  $\text{sgn}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \text{sgn}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \text{sgn}(x(x+1))$  alors

$$D_f = ] -\infty, -1[ \cup ] 0, 1[ \cup ] 1, +\infty[ .$$

**Deuxième méthode :**

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} > 0 \right\} \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ et } \frac{x+1}{x} > 0 \right\}
 \end{aligned}$$

Or, le signe de  $\frac{x+1}{x}$  est donné par le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x$	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x}$	+	0	-	+

On en déduit ainsi que  $D_f = ] -\infty; -1[ \cup ] 0; 1[ \cup ] 1; +\infty[$

Q 5 – Si  $f(x) = (x^2 - x)e^{\frac{1}{x}}$ , alors  $f'(x)$  est égale à :

**A**  $(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$

**C**  $\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}$

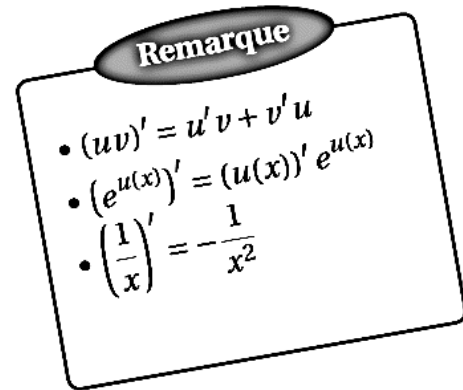
**D**  $\left(2x-2+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

**E**  $\left(2x-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

**B**  $\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

Réponse D :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( (x^2 - x)e^{\frac{1}{x}} \right)' \\ &= (x^2 - x)' e^{\frac{1}{x}} + (x^2 - x) \left( e^{\frac{1}{x}} \right)' \\ &= (2x - 1) e^{\frac{1}{x}} + (x^2 - x) \left( \frac{1}{x} \right)' e^{\frac{1}{x}} \\ &= (2x - 1) e^{\frac{1}{x}} + (x^2 - x) \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= (2x - 1) e^{\frac{1}{x}} + \left( \frac{1}{x} - 1 \right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= \left( 2x - 1 + \frac{1}{x} - 1 \right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= \left( 2x - 2 + \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$



Q 6 – Si  $z$  est un nombre complexe tel que :  $\arg(z-1) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$  et  $\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ , alors  $z$  est égal à :

**A**  $\sqrt{3}i$

**B**  $2\sqrt{3}i$

**C**  $-\sqrt{3}i$

**D**  $-2\sqrt{3}i$

**E**  $1 + \sqrt{3}i$

Réponse A :

Première méthode :

$$\arg(z-1) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \Rightarrow \operatorname{Re}(z-1) = |z-1| \times \frac{-1}{2} < 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z-1) = |z-1| \times \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

Donc les propositions **C**, **D** et **E** sont éliminées, il reste à trancher avec **A** et **B**.

Si on prend  $z = \sqrt{3}i$ , on aura : " $\arg(z+1) \equiv \arg(1 + \sqrt{3}i) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ " et

$$"\arg(z-1) \equiv \arg(-1 + \sqrt{3}i) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]"$$

**Deuxième méthode :**

Soit  $z = x + iy$  ( $z \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \arg(z-1) + \arg(z+1) &\equiv \arg[(z-1)(z+1)] [2\pi] \\ &\equiv \arg(z^2 - 1) \\ &\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} [2\pi] \\ &\equiv \pi [2\pi] \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} \arg(z^2 - 1) \equiv \pi [2\pi] &\Leftrightarrow \Im(z^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Im[(x + iy)^2 - 1] = 0 \\ &\Leftrightarrow \Im(x^2 - y^2 - 1 + i2xy) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{aligned}$$

- Si  $x \neq 0$  et  $y = 0$  alors  $z = x$

ce qui implique  $\arg(z+1) \equiv 0 [2\pi]$  ou  $\arg(z+1) \equiv \pi [2\pi]$

Donc, contradiction car  $\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

D'où :  $z = iy$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3} &\Rightarrow z+1 = |z+1| \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &\Rightarrow iy+1 = \sqrt{1+y^2} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \arg(z-1) \equiv \frac{2\pi}{3} &\Rightarrow z-1 = |z-1| \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &\Rightarrow iy-1 = \sqrt{1+y^2} \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

On additionne les deux équations (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$$2iy = \sqrt{1+y^2} \times 2i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{alors} \quad 2b = \sqrt{1+y^2} \times \sqrt{3}$$

donc  $4b^2 = 3(1+b^2)$  c-à-d  $b^2 = 3$ , alors  $b = \sqrt{3}$  (la solution  $b = -\sqrt{3}$  est ignorée car

$$\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi])$$

D'où  $z = \sqrt{3}i$

Q7 - Si  $z = 1 + e^{i\frac{\theta}{2}}$  où  $\theta \in ]-\pi; \pi[$ , alors  $|z|$  est égal à :

**A** 2

**B**  $2 \cos \frac{\theta}{2}$

**C**  $2 \cos \frac{\theta + \pi}{4}$

**D**  $\cos \frac{\theta + \pi}{4}$

**E**  $2 \cos \frac{\theta}{4}$

Réponse C :

**Première méthode :**

$$\text{On a : } z = 1 + ie^{i\frac{\theta}{2}} = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} = 1 + e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)} \left( e^{-i\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)} \right) = 2 \cos\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right) e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)}$$

Et comme  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  alors  $0 < \frac{\pi+\theta}{4} < \frac{\pi}{2}$  et donc  $2 \cos\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right) > 0$  d'où

$$|z| = 2 \cos\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right).$$

**Deuxième méthode :**

$$\begin{aligned} |z| &= \left| 1 + ie^{i\frac{\theta}{2}} \right| \\ &= \left| 1 + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \right| \\ &= \left| 1 + e^{i\frac{\theta+\pi}{2}} \right| \\ &= \left| \left( 1 + e^{i\frac{\theta+\pi}{2}} \right) \times \frac{e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}} \right| \\ &= \left| \frac{e^{i\frac{\theta+\pi}{4}} + e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}} \right| \\ &= \left| \frac{e^{i\frac{\theta+\pi}{4}} + e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}{2} \times \frac{2}{e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}} \right| \\ &= \left| \frac{e^{i\frac{\theta+\pi}{4}} + e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}{2} \right| \times \left| \frac{2}{e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}} \right| \\ &= \left| 2 \cos \frac{\theta+\pi}{4} \right| \\ &= 2 \cos \frac{\theta+\pi}{4} \quad \text{car } -\pi < \theta < \pi \quad \text{alors } 0 < \frac{\theta+\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Remarque

$$\bullet \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\bullet |e^{i\theta}| = 1$$

Q 8 – On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$  est égale à :

**A** 0

**B**  $e^{-4}$

**C**  $e^4$

**D**  $e$

**E** 1

Réponse B :

Première méthode :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln\left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{2 \frac{1}{y} \ln\left(\frac{\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{y}+1}\right)} \quad (\text{Posons } y = \frac{1}{n} : n \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0) \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{2 \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{2 \frac{1}{y} (\ln(1-y) - \ln(1+y))} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{2 \left(\frac{\ln(1-y)}{y} - \frac{\ln(1+y)}{y}\right)} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{2 \left(-\frac{\ln(1-y)}{-y} - \frac{\ln(1+y)}{y}\right)} \\
 &= e^{2(-1-1)} \\
 &= e^{-4}
 \end{aligned}$$

Car  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(n+1)}{n} = 1$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n \ln\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n \times \left(\frac{-2}{n+1}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-4 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-4}
 \end{aligned}$$

Car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n+1} = 0$  et au voisinage de 0 on a :  $\ln(1+x)$  est équivalente à  $x$ .

**Q 9** – Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique de premier terme  $u_1 = 2$  et de raison  $q = \frac{1}{3}$ , alors le produit  $u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$  ( $n \leq 1$ ) est égal à :

**A**  $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

**B**  $\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

**C**  $\frac{2^n}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

**D**  $2^n \cdot 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

**E**  $\frac{1}{2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

Réponse B :

Première méthode :

Puisque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique de premier terme  $u_1 = 2$  et de raison  $q = \frac{1}{3}$ , alors

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n &= 2 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times 2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \dots \times 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{(n-1-0+1) \text{ fois}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{0+1+2+\dots+(n-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n &= 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1-0+1)\left(\frac{0+n-1}{2}\right)} \\ &= 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{3^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \\ &= \frac{2^n}{3^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \end{aligned}$$

Remarque

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Deuxième méthode :

On a :  $(\forall k \in \mathbb{N}^*) u_k = u_1 q^{k-1} = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2 \times 3}{3^k}$ , donc  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  on a :

$$\prod_{k=1}^n u_k = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = \frac{2^n \times 3^n}{3^{\sum_{k=1}^n k}} = \frac{2^n \times 3^n}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{2^n}{3^{\frac{n(n+1)}{2} - n}} = \frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

**Q 10** – Si  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$ , alors  $f'(1)$  est égal à :

**A** 24

**B** 1

**C** 0

**D** 5

**E** -24

### Réponse A :

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , en particulier en 1. alors :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$  On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)}{x-1} && (f(1) = 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-5)(x-4)(x-3)(x-2) \\ &= 24 \end{aligned}$$

**Q 11** – Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{2 \ln x}{x(1 + (\ln x)^2)}$ .

La primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1 est :

**A**  $\ln((\ln x)^2 + 1)$

**C**  $2 \ln((\ln x)^2 + 1)$

**D**  $\frac{x \ln x}{\ln x + 1}$

**E**  $\frac{2 \ln x}{(\ln x)^2 + 1}$

**B**  $(\ln x)^2$

### Réponse A :

On a :

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x(1 + (\ln x)^2)} = \frac{(1 + (\ln x)^2)'}{1 + (\ln x)^2}$$

Donc les primitives de  $f$  sont :  $F(x) = \ln(|1 + (\ln x)^2|) + k$  où  $k \in \mathbb{R}$

et comme  $1 + (\ln x)^2 > 0$  sur  $]0; +\infty[$  alors  $F(x) = \ln(1 + (\ln x)^2) + k$

Et puisque  $F(1) = 0$  alors  $\ln(1 + (\ln 1)^2) + k = 0$  donc  $k = 0$ .

Par conséquent,  $F(x) = \ln(1 + (\ln x)^2)$

**Q 12** – L'intégrale  $\int_0^1 \frac{2t+3}{t+2} dt$  est égale à :

**A**  $\ln \frac{3}{2}$

**B**  $2 + \ln \frac{3}{2}$

**C**  $2 - \ln \frac{2}{3}$

**D**  $2 + \ln \frac{2}{3}$

**E**  $\ln \frac{2}{3}$

### Réponse D :

$$\text{On a : } \int_0^1 \frac{2t+3}{t+2} dt = \int_0^1 2 - \frac{1}{t+2} dt = \left[ 2t - \ln(t+2) \right]_0^1 = 2 - \ln 3 + \ln 2 = 2 + \ln \left( \frac{2}{3} \right)$$

**Q 13** – Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que :  $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$  est :

- A** L'axe des réels privé du point  $O$ .
- B** Le cercle de centre  $O$  et de rayon 1
- C** L'axe des réels privé des points  $A(-1)$  et  $B(1)$
- D** Le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 privé des points  $A(-1)$  et  $B(1)$
- E** L'axe des réels privé du point  $O$  union le cercle de centre  $O$  et de rayon 1

### Réponse E :

Soit  $M(z) \in P$ , on a :

#### Méthode 01

$$\begin{aligned}
 M \in (E) &\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}} \\
 &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } z - \overline{z} + \frac{\overline{z} - z}{zz} = 0 \\
 &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } \frac{(z - \overline{z})(|z|^2 - 1)}{|z|^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } (\overline{z} = z \text{ ou } |z| = 1) \\
 &\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } (M \in D(O, \vec{u}) \text{ ou } M \in C(O, 1))
 \end{aligned}$$

Soit  $z = x + iy$  avec  $z \neq 0$ .

#### Méthode 02

$$\begin{aligned}
 z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \Im\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \Im\left(x + iy + \frac{1}{x + iy}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \Im\left(x + iy + \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \Im\left(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \Im\left[x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right] = 0 \\
 &\Leftrightarrow y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow y\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \text{ car } z \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1
 \end{aligned}$$

On a :  $x^2 + y^2 = 1$  est l'équation cartésienne d'un cercle de centre  $O(0; 0)$  et de rayon 1, car  $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$ .

Et on a :  $y = 0$  est l'équation de l'axe des réels privé de  $O$ , car  $z \neq 0$  (si  $y = 0$  alors  $x \neq 0$ ).

Donc L'ensemble des points  $M$  est L'axe des réels privé du point  $O$  union le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

**Q 14** – Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $w_0 = \frac{1}{2}$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_{n+1} = (w_n - 1)^2 + 1$ .  
Si  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$  est égale à :

**A** 0**B** 2**C** 1**D**  $\frac{1}{2}$ **E** -1**Méthode 01****Réponse C :**

On a :  $(\forall n \in \mathbb{N}) w_{n+1} - 1 = (w_n - 1)^2$ , donc par passage la limite on obtient :

$l - 1 = (l - 1)^2$ , avec  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ , on en déduit que  $(l - 1)(l - 2) = 0$  et par suite

que nécessairement  $l = 1$  ou bien  $l = 2$  et en constatant que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) w_n \geq 1$

et que  $(\forall n \in \mathbb{N}) w_n \leq 2$  (puisque  $(\forall n \in \mathbb{N}) 2 - w_{n+1} = w_n(2 - w_n)$  alors c'est

facile de le prouver par récurrence) et comme

$((\forall n \in \mathbb{N}^*) w_{n+1} - w_n = (w_n - 1)^2 + 1 - w_n = (w_n - 1)(w_n - 2)$ , alors

$((\forall n \in \mathbb{N}^*) w_{n+1} - w_n \leq 0$  et donc la suite  $(w_n)_{n \geq 1}$  est décroissante, d'où :

$((\forall n \in \mathbb{N}^*) w_n \leq w_1 = \frac{5}{4}$ , et par passage à la limite on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n \leq \frac{5}{4} < 2$

D'où  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$ .

**Méthode 02**

Montrons par récurrence que :  $(\forall x \in \mathbb{N}) ; 0 < w_n < 2$

- On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = ]0; 2[$  par :  $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ .

$f$  est dérivable (donc continue) sur  $I$ ; on a :  $f'(x) = 2(x - 1)$

donc  $f$  est décroissante sur  $]0; 1[$  et croissante sur  $]1; 2[$ .

On a  $f(I) = f(]0; 2]) = [1; 2[ \subset I$  et  $w_0 \in I$

Et puisque  $(w_n)$  est convergente alors la limite de la suite  $(w_n)$  est la solution de l'équation

$f(x) = x$  dans  $I$ .

$$f(x) = x \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - (x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 1 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$

Or,  $2 \notin I$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$

**Q 15** – Soit  $a \in ]0; +\infty[$  et  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = 1 + x \ln\left(\sqrt{1 + \frac{a}{x}}\right)$ ,  
alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  est égale à :

**A** 1**B**  $1 + \frac{a}{x}$ **C**  $1 + a$ **D**  $+\infty$ **E**  $a$ 

Réponse B :

Première méthode :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x \ln\left(\sqrt{1 + \frac{a}{x}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) \quad 1 + \frac{a}{x} > 0 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} 1 + \frac{a}{2y} \ln(1 + y) \quad (\text{Posons } y = \frac{a}{x}; \quad x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} 1 + \frac{a \ln(1 + y)}{2y} \\ &= 1 + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1$$

Deuxième méthode

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x \ln \sqrt{1 + \frac{a}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{a}{2} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}} = 1 + \frac{a}{2}$$

**Q 16** – Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$  tel que :  $AB = AC = 10$ .

L'aire maximale du triangle  $ABC$  est :

**A**  $25 \frac{\sqrt{2}}{2}$ **B** 50**C** 100**D** 10**E**  $5\sqrt{2}$ 

Réponse B :

Première méthode :

Soit  $h$  la hauteur du triangle  $ABC$  et  $x$  sa base.

L'aire du triangle  $ABC$  est donnée par :  $s(x) = \frac{1}{2} x \cdot h$  c-à-d  $S(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$

$$\text{Donc : } S(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{100 - \left(\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{1}{4} x \sqrt{400 - x^2}$$

Cherchons le maximum de la fonction  $s$ .

On a :  $D_s = [0; 20]$  (car  $x \geq 0$ )

$$\text{et on a pour tout } x \text{ de } [0; 20[ : s'(x) = \frac{1}{4} \left( \sqrt{400 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{400 - 2x^2}{\sqrt{400 - x^2}} \right)$$

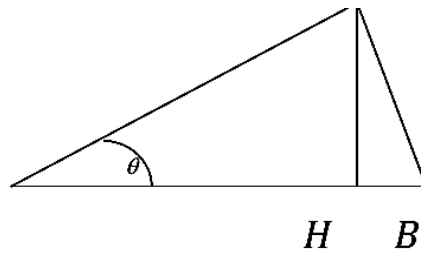
Ainsi le tableau de variations de  $s$  est comme suit :

$x$	0	$10\sqrt{2}$	20
$s'(x)$	+	0	-
$s(x)$	0	$s(10\sqrt{2})$	0

On en déduit ainsi que la valeur maximale absolue de  $s$  sur  $[0; 20]$  est :

$$s(10\sqrt{2}) = \frac{1}{4} 10\sqrt{2} \sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = 50$$

### Deuxième méthode



On a dans ce cas  $S_{ABC} = \frac{CH \times AB}{2}$  et comme  $AB = 10$  et  $CH = AC \times \sin A = 10 \sin \theta$

$S_{ABC} = 50 \sin \theta$  et comme  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  alors  $\sin \theta$  prend sa valeur maximale qui est 1 qd  $\theta = 90^\circ$  et par suite la valeur maximale possible de  $S_{ABC}$  est 50.

**Q 17** – Si  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f(x) = x^3 + 3 \ln x + 1$ , alors le nombre dérivé  $(f^{-1})'(2)$  est égal à :

**A**  $\frac{\sqrt{1}}{3}$

**B**  $\frac{1}{6}$

**C**  $\frac{1}{5}$

**D**  $\frac{1}{4}$

**E**  $\frac{1}{2}$

### Réponse B :

$$\text{On a } (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}$$

On remarque aisément que  $f(1) = 2$  et donc  $f^{-1}(2) = 1$

D'autre part on a :  $f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{x}$ , donc  $f'(f^{-1}(2)) = f'(1) = 6$

Et par suite  $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{6}$ .

Q 18 – L'intégrale  $\int_0^1 \sin(x)e^x dx$  est égale à :

**A**  $\frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

**B**  $\frac{e + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

**C**  $\frac{1 - e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

**D**  $1 + e^{\frac{\pi}{2}}$

**E**  $1 - e^{\frac{\pi}{2}}$

Réponse A :

On pose :

$$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$$

$$u'(x) = \sin x \Rightarrow u(x) = -\cos x$$

L'intégrale  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^x dx$  devient :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^x dx$$

$$= [-\cos x e^x] + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^x dx$$

On pose :

$$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$$

$$u'(x) = \cos x \Rightarrow u(x) = \sin x$$

L'intégrale  $I$  devient :

$$I = [-\cos x e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^x dx$$

$$= [-\cos x e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^x dx$$

$$= [-\cos x e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} - I$$

$$= (0 + 1) + (e^{\frac{\pi}{2}} - 0) - I$$

Alors :

$$2I = 1 + e^{\frac{\pi}{2}}$$

Donc :

$$I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

Remarque

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x) dx$$

**Q 19** – On considère la fonction  $f$  définie :  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

Un encadrement de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[0; 1]$  est :

**A**  $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$

**B**  $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq 0$

**C**  $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

**E**  $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{2}$

**D**  $0 \leq f'(x) \leq \sqrt{2}$

**Réponse B :**

### Première méthode

On sait que la monotonie d'une fonction  $g$  nous permet d'obtenir un encadrement de  $g(x)$  sur un segment  $[a, b]$ .

Comme  $(\forall x \in [0, 1]) f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x)$  alors  $(\forall x \in [0, 1]) :$

$$f''(x) = (f')'(x) = (-xf(x))' = \left( (-x)' f(x) + (-x) f'(x) \right)' = (-f(x) + x^2 f(x)) = (-1 + x^2) f(x) \leq 0$$

Donc la fonction  $f'$  est décroissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et par suite

$$(\forall x \in [0, 1]) f'(1) \leq f'(x) \leq f'(0) \text{ c.à.d } (\forall x \in [0, 1]) -\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq 0.$$

### Deuxième méthode

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ; et  $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

La fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ; et  $f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}}$

Ainsi le tableau de variations de  $f'$  est comme suit :

$x$	0	1
$f''(x)$	-	
$f'(x)$	0	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$

On en déduit ainsi que :

$$(\forall x \in [0; 1]); -\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq 0$$

**Q 20** – Soit  $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels.  
 $f$  admet une limite finie en  $+\infty$  si et seulement si :

- A**  $a > 0$  et  $b > 0$     **B**  $a = 1$  et  $b > 0$     **C**  $a = 1$  et  $b = 2$     **D**  $a = 1$  et  $b = 0$     **E**  $a > 0$  et  $b = 0$

### Réponse C :

#### Première méthode

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b})(\sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} + ax\sqrt{x+b})}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} + ax\sqrt{x+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3 - a^2x^2(x+b)}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} + ax\sqrt{x+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3 - a^2x^3 - a^2bx^2}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} + ax\sqrt{x+b}} \end{aligned}$$

Pour que cette limite soit finie (est égal à un réel), il faut que  $a = 1$  et  $b = 2$  c-à-d :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3 - a^2x^3 - a^2bx^2}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} + ax\sqrt{x+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} + x\sqrt{x+2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

#### Deuxième méthode

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}\right)} - ax\sqrt{x \left(1 + \frac{b}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}} - a\sqrt{1 + \frac{b}{x}} \right)$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}} - a\sqrt{1 + \frac{b}{x}} \right) = 1 - a$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} = +\infty$  alors pour que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbf{R}$  il faut nécessairement que  $a = 1$ , et dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{b}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \left( \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}\right)\right) - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{x}\right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \left( \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^3} - \frac{b}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x\sqrt{x}} + \sqrt{x} \frac{(2-b)}{2} \end{aligned}$$

Et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x\sqrt{x}} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  alors pour que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbf{R}$

il faut que  $2 - b = 0$  c.à.d  $b = 2$ .



**Q5**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_n = \frac{2^n + n^2}{n^2 e^n + 1}$ . La limite de la suite  $(u_n)$  en  $+\infty$  est égale à :

- A** 0                      **B**  $+\infty$                       **C** 1                      **D**  $-\infty$                       **E** -1

**Q6**

L'intégrale  $\int_1^e (\ln x)(-x + x \ln x) dx$  est égale à :

- A**  $\ln 3$                       **B** 1                      **C**  $-\frac{1}{2}$                       **D** 0                      **E**  $\ln 3$

**Q7**

La courbe de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+e^x}$  admet au point  $O(0,0)$  une tangente d'équation :

- A**  $y = x + 1$                       **B**  $y = x$                       **C**  $y = 2x$                       **D**  $y = -2x$                       **E**  $y = x - 1$

**Q8**

Dans le plan complexe, l'ensemble des points  $M(z)$  vérifiant :  $|z-2| = |z-i|$  est la droite d'équation :

- A**  $-4x+2y+3=0$                       **C**  $y = -2x+3$                       **D**  $y = 2x - \frac{3}{2}$                       **E**  $y = 2x+1$   
**B**  $y = -2x-1$

**Q9**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans  $(P) : x - z + 1 = 0$  et  $(Q) : x + y + 1 = 0$  et  $M(x_0; y_0; z_0)$  un point équidistant à  $(P)$  et  $(Q)$ .

Les coordonnées du point  $M$  vérifient :

- A**  $y_0 + z_0 = 0$  ou  $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$                       **D**  $2x_0 + y_0 = 0$  ou  $y_0 + z_0 = 0$   
**B**  $y_0 + z_0 = 0$  ou  $y_0 - z_0 = 0$   
**C**  $2x_0 + y_0 = 0$  ou  $y_0 - z_0 = 0$                       **E**  $y_0 - z_0 = 0$  ou  $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2 et trois boules vertes portant les nombres 1; 1; 2. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne. La probabilité d'avoir deux boules portant deux nombres différents sachant qu'elles sont de même couleur, est égale à :

- A**  $\frac{5}{42}$       **B**  $\frac{2}{21}$       **C**  $\frac{10}{42}$       **D**  $\frac{3}{7}$       **E**  $\frac{2}{3}$

## Q11

Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $|z| = 1$ . Le nombre  $|\sqrt{2} + z|^2 + |\sqrt{2} - \bar{z}|^2$  est égale à :

- A**  $2\sqrt{2}$       **B**  $-2\sqrt{2}$       **C** 6      **D**  $-\sqrt{2}$       **E**  $\sqrt{2}$

## Q12

La suite  $(u_n)$  définie par :  $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ . La suite  $(u_n)$  vérifie :

- A**  $(u_n)$  croissante      **C**  $u_0 = 0$       **E**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$   
**B**  $(u_n)$  minorée      **D**  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \leq 1$

## Q13

L'équation :  $\ln(-2\sqrt{2} + \ln x) + \ln(2\sqrt{2} + \ln x) = 0$  admet :

- A** Une seule solution      **D**  $S = \{e^3\}$   
**B** Deux solutions distinctes  
**C** Pas de solution      **E** Trois solutions distinctes

## Q14

La courbe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x + 1 + \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1}}{1 - x}$  admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote oblique d'équation :

- A**  $y = -2x - 1$       **C**  $y = 2x - 1$       **E**  $y = -2x - 1$   
**B**  $y = 2x + 1$       **D**  $y = -2x + 2$

## Q15

La fonction  $f$  définie par  $f(x) = -x^2 + \ln(1 + x^2)$  vérifie :

- A**  $D = \mathbb{R}$       **C**  $f'(0) = 0$       **E**  $f(0) = 1$   
**B**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$       **D**  $f$  est paire

**Q1**

Le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\ln(4-x^2)}{\ln(x+1)}$  est :

- A  $[2; +\infty[$                        C  $] -1; 2[$                        E  $[-2; -1]$   
 B  $] -1; 0[ \cup ] 0; 2[$                        D  $[0; 1[$

**Réponse B :**

**Première méthode :**

$$\begin{aligned}
 x \in D_f &\Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \text{ et } x + 1 > 0 \text{ et } \ln(x + 1) \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 < 4 \text{ et } x > -1 \text{ et } x + 1 \neq 1 \\
 &\Leftrightarrow |x| > 2 \text{ et } x > -1 \text{ et } x \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow -2 < x < 2 \text{ et } x > -1 \text{ et } x \neq 0
 \end{aligned}$$

Donc:  $D_f = ] -1; 2 [$

**Deuxième méthode :**

On a  $f(0) = 0$  donc  $0 \in D_f$  donc on peut éliminer les réponses C et D

On a  $x > -1$  donc on peut éliminer la réponse E

On a  $4 - x^2 > 0$  donc  $|x| > 2$  donc  $-2 < x < 2$  donc on peut éliminer la réponse A

Donc la réponse est B

**Q2**

L'ensemble de solutions de l'inéquation  $x \ln(x + 1) > 0$  est :

- A  $] -1; +\infty[$                        C  $] -1; 0[ \cup ] 0; +\infty[$                        E  $] -1; 1[$   
 B  $] -1; 0[$                        D  $] 0; +\infty[$

**Réponse C :**

$$x \ln(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln(x + 1) = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 0$$

x	-1	0	$+\infty$
x	-	0	+
$\ln(x + 1)$	-	0	+
$x \ln(x + 1)$	+	0	+

Donc  $x \ln(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x \in ] -1; 0 [ \cup ] 0; +\infty [$

**Q3**

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x^2 - 1}{x \sin x}$  est égale à :

**A**  $-\infty$

**B**  $-1$

**C**  $0$

**D**  $+\infty$

**E**  $1$

**Réponse D :**

Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ". En divisant sur  $x$  on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x^2 - 1}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - x}{\sin x} = +\infty$$

Car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0^+$

**Q4**

Soit  $Z$  un nombre complexe tel que  $Z = \frac{(1+i)^{21} (1+i\sqrt{3})^{19}}{(1-i)^9}$ . Un argument du nombre complexe  $Z$  est égale à :

**A**  $\frac{\pi}{3}$

**B**  $\frac{11\pi}{6}$

**C**  $-\frac{\pi}{6}$

**D**  $\pi$

**E**  $\frac{2\pi}{3}$

**Réponse B :**

$$\arg(Z) \equiv 21 \arg(1+i) + 19 \arg(1+i\sqrt{3}) - 9 \arg(1-i) [2\pi]$$

$$\equiv 21 \frac{\pi}{4} + 19 \frac{\pi}{3} - 9 \left(-\frac{\pi}{4}\right) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{16\pi + 5\pi}{4} + \frac{18\pi + \pi}{3} + \frac{8\pi + \pi}{4} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{22\pi}{12} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{11\pi}{6} [2\pi]$$

**Q5**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_n = \frac{2^n + n^2}{n^2 e^n + 1}$ . La limite de la suite  $(u_n)$  en  $+\infty$  est égale à :

**A**  $0$

**B**  $+\infty$

**C**  $1$

**D**  $-\infty$

**E**  $-1$

## Réponse B :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + n^2}{n^2 e^n + 1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n \ln 2} + n^2}{n^2 e^n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 e^n \left( \frac{1}{n^2} e^{n(\ln(2)-1)} + \frac{1}{e^n} \right)}{n^2 e^n \left( 1 + \frac{1}{n^2 e^n} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} e^{n(\ln(2)-1)} + \frac{1}{e^n}}{1 + \frac{1}{n^2 e^n}} = \frac{+\infty + 0}{1 + 0} = +\infty\end{aligned}$$

Car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} e^{n(\ln(2)-1)} = +\infty$  car  $\ln(2) - 1 > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 e^n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

## Q6

L'intégrale  $\int_1^e (\ln x)(-x + x \ln x) dx$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\ln 3$	1	$-\frac{1}{2}$	0	Autre réponse

## Réponse C :

Une primitive de la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  sur  $]0; +\infty[$  est  $x \mapsto x \ln(x) - x$  donc :

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln(x)(-x + x \ln x) dx &= \int_1^e (x \ln(x) - x)'(-x + x \ln x) dx \\ &= \frac{1}{2} [(x \ln(x) - x)^2]_1^e = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

## Q7

La courbe de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+e^x}$  admet au point  $O(0,0)$  une tangente d'équation :

**A**  $y = x + 1$

**B**  $y = x$

**C**  $y = 2x$

**D**  $y = -2x$

**E**  $y = x - 1$

## Réponse B :

L'équation est :  $y = f'(0)(y - 0) + f(0)$

On remarque que  $f(0) = 0$  donc la réponse ne peut être A ou E donc  $y = f'(0)x$

Calculons  $a = f'(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x+e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \frac{1}{(x+e^x)} = 1 = f'(0)$$

Car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+e^x)} = 1$

Donc  $y = x$

## Q8

Dans le plan complexe, l'ensemble des points  $M(z)$  vérifiant :  $|z-2| = |z-i|$  est la droite d'équation :

- A**  $-4x+2y+3=0$       **C**  $y=-2x+3$       **D**  $y=2x-\frac{3}{2}$       **E**  $y=2x+1$   
**B**  $y=-2x-1$

## Réponse A et D :

$$\begin{aligned}
 |z-2| = |z-i| &\Leftrightarrow |x+iy-2| = |x+iy-i| \quad (\text{On pose } z = x+iy \text{ avec } x \text{ et } y \text{ des réels}) \\
 &\Leftrightarrow |x-2+iy| = |x+i(y-1)| \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \\
 &\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 = x^2+(y-1)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2 = x^2+y^2-2y+1 \\
 &\Leftrightarrow -4x+2y+3=0 \\
 &\Leftrightarrow y = 2x - \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

## Q9

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans  $(P) : x-z+1=0$  et  $(Q) : x+y+1=0$  et  $M(x_0; y_0; z_0)$  un point équidistant à  $(P)$  et  $(Q)$ .

Les coordonnées du point  $M$  vérifient :

- A**  $y_0+z_0=0$  ou  $2x_0+y_0-z_0+2=0$       **D**  $2x_0+y_0=0$  ou  $y_0+z_0=0$   
**B**  $y_0+z_0=0$  ou  $y_0-z_0=0$   
**C**  $2x_0+y_0=0$  ou  $y_0-z_0=0$       **E**  $y_0-z_0=0$  ou  $2x_0+y_0-z_0+2=0$

## Réponse A :

On a  $(P) : x-z+1=0$  et  $(Q) : x+y+1=0$

Et on a  $M(x_0; y_0; z_0)$  un point équidistant à  $(P)$  et  $(Q)$  donc  $d(M; (P)) = d(M; (Q))$

$$\begin{aligned}
 d(M; (P)) = d(M; (Q)) &\Leftrightarrow \frac{|x_0-z_0+1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0+y_0+1|}{\sqrt{2}} \\
 &\Leftrightarrow |x_0-z_0+1| = |x_0+y_0+1| \\
 &\Leftrightarrow x_0-z_0+1 = x_0+y_0+1 \text{ ou } x_0-z_0+1 = -x_0-y_0-1 \\
 &\Leftrightarrow y_0+z_0=0 \text{ ou } 2x_0+y_0-z_0+2=0
 \end{aligned}$$

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2 et trois boules vertes portant les nombres 1; 1; 2. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne. La probabilité d'avoir deux boules portant deux nombres différents sachant qu'elles sont de même couleur, est égale à :

**A**  $\frac{5}{42}$

**B**  $\frac{2}{21}$

**C**  $\frac{10}{42}$

**D**  $\frac{3}{7}$

**E**  $\frac{2}{3}$

### Réponse E :

A « obtenir 2 boules portant deux nombres différents »

B « obtenir 2 boules de même couleur » ( $V; V$ ) ou ( $R; R$ )

$$\text{Donc : } p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

$A \cap B$  « obtenir 2 boules de même couleur et portant deux nombres différents » ( $V_1; V_2$ ) ou ( $R_1; R_2$ )

$$\text{Donc } p(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2 \times A_2^1 \times A_2^1 + 2 \times A_2^1 \times A_1^1}{A_7^2} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Donc } p_B(A \cap B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$$

### Q11

Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $|z| = 1$ . Le nombre  $|\sqrt{2} + z|^2 + |\sqrt{2} - \bar{z}|^2$  est égale à :

**A**  $2\sqrt{2}$

**B**  $-2\sqrt{2}$

**C** 6

**D**  $-\sqrt{2}$

**E**  $\sqrt{2}$

### Réponse C :

Remarque : On peut éliminer les réponses négatives B et D

On a  $z$  est un nombre complexe tel que  $|z| = 1$

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} + z|^2 + |\sqrt{2} - \bar{z}|^2 &= (\sqrt{2} + z)(\overline{\sqrt{2} + z}) + (\sqrt{2} - \bar{z})(\overline{\sqrt{2} - \bar{z}}) \\ &= (\sqrt{2} + z)(\sqrt{2} + \bar{z}) + (\sqrt{2} - \bar{z})(\sqrt{2} - z) \\ &= 2 + \sqrt{2}\bar{z} + \sqrt{2}z + z\bar{z} + 2 - \sqrt{2}z - \sqrt{2}\bar{z} + z\bar{z} \\ &= 4 + 2z\bar{z} = 6 \quad (\text{Car } z\bar{z} = |z|^2 = 1) \end{aligned}$$

### Q12

La suite  $(u_n)$  définie par :  $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ . La suite  $(u_n)$  vérifie :

**A**  $(u_n)$  croissante

**C**  $u_0 = 0$

**E**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

**B**  $(u_n)$  minorée

**D**  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \leq 1$

## Réponse B et D et E :

On a  $u_0 = 1$  et  $u_1 = \frac{1}{2}$  donc  $u_0 > u_1$  donc A et C sont fausses

Soit  $n$  un entier naturel

On a  $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} > 0$  donc  $(u_n)$  est minorée par 0 donc B est vraie

On a  $1 + n^2 \geq 1$  donc  $\sqrt{1+n^2} \geq 1$  donc  $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \leq 1$  donc  $u_n \leq 1$  donc D est vraie

## Q13

L'équation :  $\ln(-2\sqrt{2} + \ln x) + \ln(2\sqrt{2} + \ln x) = 0$  admet :

**A** Une seule solution

**D**  $S = \{e^3\}$

**B** Deux solutions distinctes

**C** Pas de solution

**E** Trois solutions distinctes

## Réponse A et D :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } -2\sqrt{2} + \ln x > 0 \text{ et } 2\sqrt{2} + \ln x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x > 2\sqrt{2} \text{ et } \ln x > -2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x > e^{2\sqrt{2}} \text{ et } x > e^{-2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x > e^{2\sqrt{2}}$$

Donc:  $D_f = ]e^{2\sqrt{2}}; +\infty [$

$$(E) \Leftrightarrow \ln(-2\sqrt{2} + \ln x) + \ln(2\sqrt{2} + \ln x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln((-2\sqrt{2} + \ln x)(2\sqrt{2} + \ln x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln^2(x) - 8 = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln^2(x) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln(x) - 3)(\ln(x) + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 3 \text{ ou } \ln x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = e^3 \text{ ou } x = e^{-3} \notin D_f$$

$$\Leftrightarrow x = e^3$$

## Q14

La courbe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x + 1 + \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1}}{1 - x}$  admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote oblique d'équation :

**A**  $y = -2x - 1$

**C**  $y = 2x - 1$

**E**  $y = -2x - 1$

**B**  $y = 2x + 1$

**D**  $y = -2x + 2$

## Réponse C :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1}}{1 - x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}}}{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \sqrt{1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}}}{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = -2 \end{aligned}$$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1) + 2 = 0$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - 2x + 1 = 0$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = 0$

## Q15

La fonction  $f$  définie par  $f(x) = -x^2 + \ln(1 + x^2)$  vérifie :

**A**  $D = \mathbb{R}$

**C**  $f'(0) = 0$

**E**  $f(0) = 1$

**B**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

**D**  $f$  est paire

## Réponse A ; B ; C et D :

$$f(x) = -x^2 + \ln(1 + x^2)$$

On a  $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 + x^2 > 0$  donc  $D_f = \mathbb{R}$

Donc A est vraie

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-x^2 + \ln(1 + x^2)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -x^2 \left(1 - \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -x^2 \left(1 - \left(\frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2}\right) \times \left(\frac{1 + x^2}{x^2}\right)\right) = -\infty \end{aligned}$$

Car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1$

Donc B est vraie

$$f'(x) = -2x + \frac{2x}{1 + x^2} \text{ donc } f'(0) = 0$$

Donc C est vraie

$$f(-x) = -(-x)^2 + \ln(1 + (-x)^2) = -x^2 + \ln(1 + x^2) = f(x)$$

Donc D est vraie

On a  $f(0) = 0$  donc E est fausse

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - e^x + 1}$  est égale à

- a. 0
- b.  $+\infty$
- c. 3
- d. -2
- e. 1

Q2

Soit  $u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$  et  $v_n = \sin\left(\frac{3}{2n\pi}\right)$ . Quelles sont les bonnes réponses ?

- [Vrai] La suite  $(u_n)$  diverge et la suite  $(v_n)$  converge.
- [Faux] Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont divergentes.
- [Vrai] La suite  $(u_n)$  n'a pas de limite et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .
- [Faux]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Explications: Par continuité de la fonction sinus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2n\pi} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = \sin\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2n\pi}\right) = \sin 0 = 0.$$

Ainsi,  $(v_n)$  converge et sa limite est 0. Par ailleurs,

$$u_{3n} = \sin(2n\pi) = 0 \text{ et } u_{3n+1} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Q3

Soit  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 20} \ln(1 - x^2)$ . Alors le domaine de définition de  $f$  est

- a.  $] -1, 1[$
- b.  $] -\infty, -5] \cup [4, +\infty[$
- c.  $\emptyset$
- d.  $] -5, 4[$
- e. rien de ce qui précède

**Q4**

Soit  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ . Quelles sont les assertions vraies ?

- [Faux]  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- [Vrai]  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}$
- [Faux]  $f$  n'admet pas de limite en 0.
- [Faux]  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

*Explications:* On pourra multiplier  $f$  par  $\sqrt{x+1}+1$  et  $(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1$  les expressions conjuguées de  $\sqrt{x+1}-1$  et de  $\sqrt[3]{x+1}-1$  respectivement. On obtient :  $f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1}{\sqrt{x+1}+1}$ .

**Q5**

Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$  sur  $]1, +\infty[$  est

- a.  $x \mapsto \ln(\ln(x))$
- b.  $x \mapsto \frac{1}{2} \ln^2(x)$
- c.  $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$
- d.  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$
- e. rien de ce qui précède

**Q6**

Soit  $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ . Quel est l'ensemble  $S$  des points  $x_0$  où la tangente à  $\mathcal{C}_f$  est perpendiculaire à la droite d'équation  $y = x$  ?

- [Faux]  $S = \{-2\}$
- [Faux]  $S = \{-3\}$
- [Vrai]  $S = \{-1, -3\}$
- [Faux]  $S = \emptyset$

*Explications:* La pente de la droite  $y = x$  est 1, donc la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $x_0$  est perpendiculaire à cette droite si, et seulement si,  $f'(x_0) = -1$ . C'est-à-dire  $x_0 = -1$  ou  $x_0 = -3$ .

**Q7**

Soit  $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$ . Alors, pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $f'(x)$  est égale à

a.  $\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$

b.  $\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}$

c.  $\frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$

d.  $-\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}$

e. rien de ce qui précède

**Q8**

Soit  $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$  si et seulement si :

[Faux]  $a > 0$  et  $b > 0$

[Faux]  $a = 1$  et  $b > 0$

[Vrai]  $a = 1$  et  $b = 2$

[Faux]  $a = 1$  et  $b = 0$

*Explications:* Si  $a \leq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . On suppose donc que  $a > 0$  et on multiplie  $f$  par son expression conjuguée. on obtient :  $f(x) = \frac{(1-a^2)x^3 + (2-a^2b)x^2 + 3}{\sqrt{x^3+2x^2+3}+ax\sqrt{x+b}}$ . On déduit que  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$  si et seulement si  $a = 1$  et  $b = 2$ .

**Q9**

Soit  $D$  le domaine de définition de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}$ . Une primitive de  $f$  sur  $D$  est

a.  $x \mapsto \ln(x \ln(x))$

b.  $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$

c.  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

d.  $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x}$

e. rien de ce qui précède

**Q10**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] \frac{3}{2}, +\infty[ \setminus \{2\}$  par :  $f(x) = \begin{cases} a \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}, & \text{si } x < 2 \\ \frac{\sqrt{2x-3}-b}{x-2}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ .  $f$  admet une limite

finie quand  $x$  tend vers 2 si et seulement si :

- [Vrai]  $a = 2$  et  $b = 1$
- [Faux]  $a > 0$  et  $b > 0$
- [Faux]  $a = 2$  et  $b > 0$
- [Faux]  $a = 0$  et  $b = 1$

*Explications:* Si  $b \neq 1$ ,  $f$  admet une limite infinie quand  $x$  tend vers  $2^+$ . On suppose que  $b = 1$  et on multiplie  $f$  par l'expression conjuguée selon les cas. On obtient :  $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{x-1}+1} & \text{si } x < 2 \\ \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ . On déduit que  $f$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers 2 si et seulement si  $a = 2$ .

**Q11**

Soit  $f : x \mapsto e^{\cos(\cos(x))}$ . Alors  $f'(x)$  est égale à

- a.  $2 \cos(x) e^{\cos(\cos(x))}$
- b.  $-2 \cos(x) \sin(x) e^{\cos(\cos(x))}$
- c.  $\cos(\cos(x)) e^{\cos(\cos(x))}$
- d.  $-\sin(\cos(x)) \sin(x) e^{\cos(\cos(x))}$
- e. rien de ce qui précède

**Q12**

Soit  $f(x) = \frac{(2x)^x}{x^{(2x)}}$ . Quelles sont les assertions vraies ?

- [Faux]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- [Vrai]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- [Faux]  $f$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ .
- [Faux]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

*Explications:* Par définition, si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions telles que  $u > 0$ ,  $u^v = e^{v \ln u}$ . On en déduit que  $f(x) = \exp[x \ln(2x) - 2x \ln x] = \exp[x \ln 2 - x \ln x]$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**Q13**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = 2u_{n-1} + 1$ . Alors

- a. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^n u_0$
- b. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^{n-1} u_0$
- c. la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = u_n + 1$  est géométrique
- d. la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - 1$  est géométrique
- e. rien de ce qui précède

**Q14**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue avec  $f(0) < 0$  et  $f(1) > 0$ . Par dichotomie on construit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , avec  $a_0 = 0$  et  $b_0 = 1$ . Quelles sont les assertions vraies ?

- [Faux] Si  $f(\frac{1}{2}) > 0$  alors  $a_1 = \frac{1}{2}$  et  $b_1 = \frac{1}{2}$ .
- [Vrai]  $f$  s'annule sur  $[a_n, b_n]$  (quel que soit  $n \geq 0$ ).
- [Faux]  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont des suites croissantes.
- [Faux]  $a_n \rightarrow 0$  ou  $b_n \rightarrow 0$ .

*Explications:* Par dichotomie on construit deux suites adjacentes.  $(a_n)$  est croissante,  $(b_n)$  est décroissante et  $a_n \leq b_n$ . Ces deux suites convergent vers une valeur  $c \in ]a, b[$ , telle que  $f(c) = 0$ .

**Q15**

Soit  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}\right) \sqrt{e^x - 1}$ . Alors le domaine de définition de  $f$  est

- a.  $\mathbb{R}_+$
- b.  $\mathbb{R}_+^*$
- c.  $[0, 1[ \cup ]2, +\infty[$
- d.  $] -\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$
- e. rien de ce qui précède

**Q16**

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- [Faux]  $f$  n'est pas dérivable en 0.
- [Faux]  $f$  est dérivable en 0 est  $f'(0) = 0$ .
- [Vrai]  $f$  est dérivable en 0 est  $f'(0) = 1$ .
- [Vrai] Pour  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ .

*Explications:* On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x \sin \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Donc,  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1$ . Par ailleurs, les règles de calcul donnent, pour  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = (x)' + (x^2)' \sin \frac{1}{x} + x^2 \left( \sin \frac{1}{x} \right)' = 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

**Q17**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + e^{-x}}$  est égale à

- a.  $-\infty$
- b.  $+\infty$
- c. 0
- d. 1
- e. rien de ce qui précède

**Q18**

Soit  $f(x) = e^{3x^4 - 4x^3}$ . Quelles sont les bonnes réponses ?

- [Faux]  $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$
- [Vrai]  $f$  admet un minimum en 1.
- [Faux]  $f$  admet un maximum en 1.
- [Vrai] Il existe  $a \in ]0, 1[$  tel que  $f''(a) = 0$ .

*Explications:* On a  $f'(x) = (12x^3 - 12x^2)e^{3x^4 - 4x^3} = 12x^2(x - 1)e^{3x^4 - 4x^3}$ . On en déduit que  $f'(1) = 0$  et  $f'(x) < 0$  pour  $x < 1$  et  $f'(x) > 0$  pour  $x > 1$ . Donc  $f$  admet un minimum en 1.

Par ailleurs,  $f'(0) = f'(1) = 0$  et, puisque  $f'$  est continue sur  $[0, 1]$  et est dérivable sur  $]0, 1[$ , le théorème de Rolle implique qu'il existe  $a \in ]0, 1[$  tel que  $f''(a) = 0$ .

**Q19**

Dans un repère orthonormé de l'espace, soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans d'équations respectives

$$x - y + 2z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y - z = 0.$$

Alors une représentation paramétrique de la droite  $d$ , intersection des plans  $P_1$  et  $P_2$ , est

- a.  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$
- b.  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$
- c.  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$
- d.  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

- e. rien de ce qui précède

**Q20**

Soit  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ . Quel est l'ensemble  $S$  des points  $x_0$  où la tangente à  $\mathcal{C}_f$  est parallèle à la droite d'équation  $y = x$  ?

- [Faux]  $S = \{-1\}$
- [Faux]  $S = \{0\}$
- [Faux]  $S = \{0, 1\}$
- [Vrai]  $S = \emptyset$

*Explications:* La pente de la droite  $y = x$  est 1, donc la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $x_0$  est parallèle à cette droite si, et seulement si,  $f'(x_0) = 1$ . Une telle équation n'admet pas de solution.

**Q21**

Soit  $f : x \mapsto \ln(|x^2 - 1|)$ . Alors le domaine de définition de  $f$  est

- a.  $] -1, 1[$
- b.  $\mathbb{R}$
- c.  $] -\infty, -1[ \cup ] 1, +\infty[$
- d.  $\emptyset$
- e. rien de ce qui précède

**Q22**

Soit  $E$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $M$  et les points  $A$  et  $B$  d'affixe  $i$  et  $iz$  respectivement soient alignés. Quelles sont les assertions vraies ?

- [Faux]  $E$  est la droite passant par les points d'affixe  $i$  et  $-1 + i$  respectivement.
- [Vrai]  $E$  est le cercle de rayon  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et de centre le point d'affixe  $\frac{1}{2}(1 + i)$ .
- [Faux]  $E$  est le cercle de rayon  $\frac{1}{2}$  et de centre le point d'affixe  $1 + i$ .
- [Faux]  $E$  est la droite passant par les points d'affixe  $-i$  et  $1 - i$  respectivement.

Explications:  $M(z), A(i)$  et  $B(iz)$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\vec{AM}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires. On pose  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Les vecteurs  $\vec{AM}$  et  $\vec{AB}$  sont de coordonnées  $(x, y - 1)$  et  $(-y, x - 1)$  respectivement.  $M(x + iy) \in E$  si et seulement si  $\det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0$ .

**Q23**

On considère les deux plans  $P : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t - s, \end{cases} (t, s \in \mathbb{R})$  et  $P' : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t + s \\ z = 2 + 2s, \end{cases} (t, s \in \mathbb{R})$

Quelles sont les assertions vraies ?

- [Faux]  $P \cap P'$  est une droite.
- [Faux]  $P$  et  $P'$  sont perpendiculaires.
- [Vrai]  $P = P'$
- [Faux]  $P \cap P' = \emptyset$

Explications: On vérifie que  $P = P'$ .

**Q24**

Soit  $D$  la droite d'équations :  $\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$  et  $P$  le plan contenant  $D$  et perpendiculaire au plan  $Q$  d'équation :  $x - z + 3 = 0$ . Une équation cartésienne de  $P$  est :

- [Vrai]  $x + z = 1$
- [Faux]  $x + y = 0$
- [Faux]  $y + z = 1$
- [Faux]  $x - y = -1$

Explications:  $\vec{u}(1, 0, -1)$  est un vecteur normal à  $Q$  qui n'appartient pas au plan vectoriel  $x - y = 0$ . Donc  $P$  est différent du plan d'équation :  $x - y = -1$  et donc une équation cartésienne de  $P$  est de la forme :  $(x + z - 1) + \alpha(x - y + 1) = 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On calcule  $\alpha$  de sorte que  $\vec{u}(1, 0, -1)$  soit un vecteur de  $P$ .

**Q25**

Soit  $D$  la droite d'équations :  $\begin{cases} x-y = -1 \\ y-z = 0 \end{cases}$  et  $P$  le plan contenant  $D$  et parallèle à la droite

d'équations  $D' : \begin{cases} x+z = 0 \\ x-y = 2 \end{cases}$ . Une équation cartésienne de  $P$  est :

- [Faux]  $x-z = 1$
- [Faux]  $x-y = 0$
- [Faux]  $y-z = 0$
- [Vrai]  $x-y = -1$

*Explications:*  $\vec{u}(1, 1, -1)$  est un vecteur directeur de la droite  $D'$  qui n'appartient pas au plan  $y-z = 0$ . Donc  $P$  est différent du plan d'équation :  $y-z = 0$  et donc une équation cartésienne de  $P$  est de la forme :  $(x-y+1) + \alpha(y-z) = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ . On calcule  $\alpha$  de sorte que  $\vec{u}(1, 1, -1)$  soit un vecteur de  $P$ .

**Q26**

Soit  $(P_n), n \in \mathbb{N}$ , la famille de plans d'équations :  $n^2x + (2n-1)y + nz = 3$ . On note  $E$  l'intersection de ces plans, c'est-à-dire  $E = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; M \in P_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$ . Quelles sont les assertions vraies ?

- [Faux]  $E = \emptyset$
- [Faux]  $E$  est un plan d'équation  $x + y + z = 3$ .
- [Faux]  $E$  est une droite d'équation  $\begin{cases} x+y+z = 3 \\ y = -3 \end{cases}$ .
- [Vrai]  $E$  est le point de coordonnées  $(0, -3, 6)$ .

*Explications:* Soit  $M(x, y, z) \in E$ , alors  $n^2x + (2n-1)y + nz = 3, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow xn^2 + (2y+z)n - y - 3 = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 0, 2y+z = 0$  et  $y+3 = 0$ .

**Q27**

Soit  $D$  la droite passant par le point  $A(1, -1, 0)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}(1, 1, -1)$ . Soit  $M(1, -1, 3)$  un point et  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $D$ . Les coordonnées de  $H$  sont :

- [Faux]  $H(0, 1, 1)$
- [Faux]  $H(1, 2, 1)$
- [Vrai]  $H(0, -2, 1)$
- [Faux]  $H(1, -2, 1)$

*Explications:*  $H \in D$ , donc il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $H(1+t, -1+t, -t)$ . On calcule  $t$  en utilisant l'égalité :  $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$ .

**Q28**

Soit  $P_1 : z+3 = 0$  et  $P_2 : 2x+y+2z-1 = 0$  des plans et  $\pi$  un plan bissecteur de  $P_1$  et  $P_2$ , c'est-à-dire :  $M \in \pi$  si et seulement si  $M$  est à la même distance de  $P_1$  et de  $P_2$ . Une équation cartésienne de  $\pi$  est :

- [Vrai]  $2x + y - z - 10 = 0$  ou  $2x + y + 5z + 8 = 0$
- [Faux]  $x + y - z - 1 = 0$  ou  $x + y + z + 1 = 0$
- [Faux]  $2x + y + z + 8 = 0$  ou  $2x - y + 5z + 7 = 0$
- [Faux]  $x + y - z - 4 = 0$  ou  $x + y + 3z - 8 = 0$

*Explications:*  $M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow |z+3| = \frac{|2x+y+2z-1|}{3}$ .

**Q29**

Soient  $u_n = \sqrt{n^2 + 4n - 1} - n$  et  $v_n = \frac{4n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n - 1} + n}$ . Quelles sont les bonnes réponses?

- [Faux]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$
- [Faux]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$
- [Vrai]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$
- [Faux]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Explications: On multiplie par le terme conjugué, on obtient  $u_n = \frac{4n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n - 1} + n} = v_n$ . Ensuite,

$$\frac{4n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n - 1} + n} = \frac{4n \left(1 - \frac{1}{4n}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}} + 1\right)} = 4 \frac{1 - \frac{1}{4n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}} + 1} \xrightarrow{+\infty} 2.$$

**Q30**

Soit (E) l'inéquation :  $\ln |1 + x| - \ln |2x + 1| \leq \ln 2$ . Quelles sont les assertions vraies?

- [Faux] Le domaine de définition de (E) est  $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ .
- [Faux] L'ensemble des solutions de (E) est :  $]-1, -\frac{3}{5}[ \cup ]-\frac{1}{3}, +\infty[$ .
- [Faux] L'ensemble des solutions de (E) est  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, -\frac{3}{5}[$ .
- [Vrai] L'ensemble des solutions de (E) est :  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, -\frac{3}{5}[ \cup ]-\frac{1}{3}, +\infty[$ .

Explications: Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ .  $(E) \Leftrightarrow \ln \left| \frac{x+1}{4x+2} \right| \leq 0 \Leftrightarrow (E') : \left| \frac{x+1}{4x+2} \right| \leq 1$ .

Si  $x > -\frac{1}{2}$ ,  $(E') \Leftrightarrow -4x - 2 \leq x + 1 \leq 4x + 2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ .

Si  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $(E') \Leftrightarrow -4x - 2 \geq x + 1 \geq 4x + 2 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{5}$ .

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, -\frac{3}{5}[ \cup ]-\frac{1}{3}, +\infty[$ .

**Q31**

Soit (S) le système d'équations :  $\begin{cases} 2^x = y^2 \\ 2^{x+1} = y^{2+x} \end{cases}$ . On note E l'ensemble des (x, y) qui vérifient (S). Quelles sont les assertions vraies?

- [Faux] (S) est défini pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- [Faux] Le cardinal de E est 1.
- [Vrai] Le cardinal de E est 2.
- [Faux] Le cardinal de E est 4.

Explications: (S) est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $y > 0$ .

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \text{ et } y > 0, (S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^{\frac{x}{2}} \\ 2^{x+1} = 2^{x+\frac{x}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^{\frac{x}{2}} \\ x^2 = 2 \end{cases}.$$

Donc  $E = \{(\sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}); (-\sqrt{2}, \sqrt{2}^{-\sqrt{2}})\}$  et donc le cardinal de E est 2.

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**Q1**

L'ensemble de solutions de l'équation  $\ln^2(x) - 3 \ln(x) + 2 = 0$  dans  $\mathbb{R}$  est :

A	B	C	D	E
{1; 2}	$\emptyset$	{1; e}	{e, e <sup>2</sup> }	{0; e}

**Q2**

On considère le nombre complexe  $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Sachant que  $z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ , un argument de z est :

A	B	C	D	E
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$

**Q3**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1} \right)^{\sqrt{n}}$  est :

A	B	C	D	E
$+\infty$	1	e	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e^2}$

**Q4**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + 1)}$  est :

A	B	C	D	E
0	1	2	3	$+\infty$

Q5

Soit  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  et  $z = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ , alors le nombre complexe  $z$  est égale à :

A	B	C	D	E
$e^{i\frac{\theta}{2}}$	$e^{i\theta}$	$e^{i2\theta}$	-1	$e^{-i2\theta}$

Q6

En calculant  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$ , la valeur de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) \cos^2(x) dx$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

Q7

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ f(1) = f(-1) = 0 \end{cases}$

A	B	C	D	E
$f$ est continue en 1	$f$ est dérivable à droite en -1	$f$ est impaire	$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ : $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Q8

Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$  et  $u_0 = 1$ .

A	B	C	D	E
$(u_n)$ est une suite géométrique	$(u_n)$ est une suite arithmétique	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	$(u_n)$ est une suite convergente

Q9

Le centre de symétrie de la courbe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x}$  est le point

A	B	C	D	E
$\Omega(1; 0)$	$\Omega(1; -1)$	$\Omega(0; 0)$	$\Omega(0; 2)$	$\Omega(0; 1)$

Q10

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $(z^2 + z - 1)$  est réel est :

A	B	C	D	E
Un cercle	Une droite	$\left\{A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)\right\}$	Une demi-droite	Autre réponse

**Q11**

La valeur de  $a$  pour que la fonction  $h$  définie:  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\sin(\frac{\pi}{2}x))}{x^2-1} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$ , soit

continue en 1 est :

A	B	C	D	E
$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	1	Toutes les réponses sont fausses

**Q12**

Le module du nombre complexe  $\frac{2019-2020i}{2019+2020i}$  est :

A	B	C	D	E
-1	1	$\sqrt{2019^2 + 2020^2}$	$\sqrt{2019 + 2020}$	Toutes les réponses sont fausses

**Q13**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{4}{3}$	-2	1	0	$+\infty$

**Q14**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) : f(x) = \frac{x+x^2+x^3+\dots+x^n}{n}$

La valeur de la dérivée de  $f$  en 1 est  $f'(1) = b$  avec :

A	B	C	D	E
$b = n^2$	$b = n + 1$	$b = \frac{n}{2}$	$b = \frac{n + 1}{2}$	Autre réponse

**Q15**

La valeur de  $I = \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx$  est :

A	B	C	D	E
$I = \frac{1}{2}$	$I = 0$	$I = -1$	$I = \frac{1}{4}$	Autre réponse

**Q16**

Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes . On a  $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = I$  avec :

A	B	C	D	E
$I = 2 z_1 $	$I =  z_1  -  z_2 $	$I = 2 z_1  -  z_2 $	$I = 2( z_1  +  z_2 )$	Autre réponse

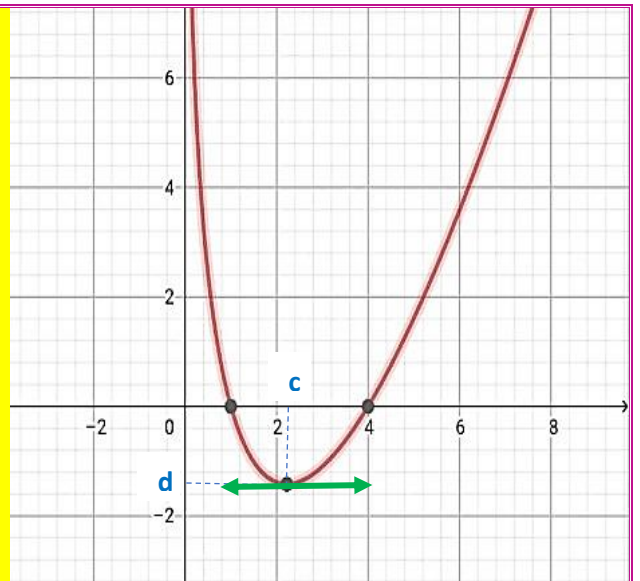
**Q17**

Soit  $f$  la fonction définie par sa courbe ci-contre :

On considère que  $f$  s'écrit de la façon suivante :

$$f(x) = (ax + b)\ln(x), \text{ avec } a \text{ et } b \text{ sont des réels}$$

La valeur de  $a$  et  $b$  est :



A	B	C	D	E
$a = 1$ $b = -2$	$a = 1$ $b = -4$	$a = -2$ $b = 1$	$a = -1$ $b = 1$	Autre réponse

**Q18**

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D	E
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	$f'(1) = 0$	$f^{-1}$ est non dérivable en $d$	$f'(c) = d$	Autre réponse

**Q19**

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D	E
$\int_1^5 f(x) dx \leq 0$	$\forall x \in [1; 4]: f(x) > 0$	$\forall x \in [1; 4]: f'(x) > 0$	$\forall x \in [1; 4]: f''(x) < 0$	Autre réponse

**Q20**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux plans d'équations cartésiennes  $(P): x - y + z = 0$  et  $(Q): x + y - z + 1 = 0$

L'intersection des plans  $(P)$  et  $(Q)$  est :

A	B	C	D	E
Plan	Droite de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; -1)$	Droite qui passe par $A(0; 0; -1)$	Droite de vecteur directeur $\vec{v}(1; -1; 1)$	Autre réponses

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**Q1**

Soit la suite  $(u_n)$  suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $(q > 0)$  tel que  $u_1 = 2$  et  $u_2 = 4$  donc  $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  égale :

A	B	C	D	E
$2^n - 1$	$2^{n+1} - 1$	$\frac{1}{2}(2^n - 1)$	$2^n + 1$	$1 - 2^{n+1}$

**Q2**

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{10^x - 10}{x - 1}$  est égale à :

A	B	C	D	E
$10 \ln 10$	$\frac{1}{\ln 10}$	$\ln 10$	$\frac{1}{10 \ln 10}$	$\frac{\ln 10}{10}$

**Q3**

Le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(1 - \frac{2}{\sqrt{x}})$  est le point

A	B	C	D	E
$] \sqrt{2}; +\infty[$	$]0; 4[ \cup ]4; +\infty[$	$]0; \sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}; +\infty[$	$]4; +\infty[$	$]0; 4[$

**Q4**

L'expression complexe de rotation de centre  $A(1 - i)$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  est :

A	B	C	D	E
$z'iz$	$z' = iz - 2i$	$z' = iz - 2$	$z' = iz + 1 - i$	Autre réponse

**Q5**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points A ; B et C d'affixes respectives  $a = 2 + i$ ;  $b = -1 + i$  et  $c = -1 - 3i$  :

A	B	C	D	E
ABC triangle équilatéral	ABC triangle isocèle	ABC un triangle rectangle en B	A ; B et C appartient à un cercle de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$	A ; B et C appartient à un cercle de centre $\Omega(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$

**Q6**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x + 1 - \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$

La courbe de la fonction  $f$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $-\infty$  d'équation :

A	B	C	D	E
$y = -x + 1$	$y = -x + \frac{5}{4}$	$y = -x + \frac{3}{4}$	$y = -x + \frac{1}{2}$	$y = -x + \frac{3}{2}$

**Q7**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 + 1$  et  $g(x) = e^{x+1}$

Alors  $f \circ g(x)$  est égale à :

A	B	C	D	E
$e^{x^2+2}$	$(x^2 + 1)e^{x+1}$	$e^{2x+2} + 1$	$e^{x^2+2} + 1$	<i>Autre réponse</i>

**Q8**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[2; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 - 4x - 11$ . La valeur de  $f^{-1}(1)$  est :

A	B	C	D	E
-4	6	$y = 2 + \sqrt{15}$	-2	1

**Q9**

La valeur de  $I = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$  est :

A	B	C	D	E
$I = e^2$	$I = e^2 - 1$	$I = 2e^2 - 2$	$I = e^2 + 2$	<i>Autre réponse</i>

**Q10**

La valeur de l'intégrale  $\int_{-1}^1 x^3 e^{x^2} dx$  est :

A	B	C	D	E
$e$	$\frac{1}{e}$	$2e$	$-\frac{1}{e}$	0

**Q11**

Soient  $z$  un nombre complexe tel que  $|i - \bar{z}| = |1 + iz|$  donc :

A	B	C	D	E
$Im(z) = 1$	$Re(z) = 1$	$z \in \mathbb{R}$	$z \in i\mathbb{R}$	<i>Autre réponse</i>

**Q12**

Lesquelles des suites suivantes sont convergentes ?

A	B	C	D	E
$\frac{3^n}{n^{2020}}$	$\frac{-n + (-1)^n \sqrt{n+1}}{n+2}$	$3n \sin\left(\frac{1}{2n}\right)$	$\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln(n)}$	Autre réponse

**Q13**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points A et B d'affixes respectives  $a = 1$ ;  $b = -i$  :

L'affixe du point C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  est c défini par :

A	B	C	D	E
$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 + i)$	$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 - i)$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i)$	$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 - i)$	Autre réponse

**Q14**

Choisit la bonne réponse

A	B	C	D	E
$\int_0^{\sqrt{8}} \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = 34$	$\int_0^{\sqrt{8}} \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = 36$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) dx = 3\pi$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) dx = 6\pi$	Autre

**Q15**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ .

Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  sur , alors pour tout  $x \in ]1; +\infty[$  on a :

A	B	C	D	E
$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$	$f^{-1}(x) = x$	$f^{-1}(x) = x^3$	$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

**Q16**

Dans l'ensemble  $\mathbb{N}$  l'équation  $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^b$  d'inconnue  $n$  admet :

A	B	C	D	E
$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$	$f^{-1}(x) = x$	$f^{-1}(x) = x^3$	$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

**Q17**

Soit  $x \in ]-1; 1[$ , on considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = (1 + |x|)^n$

On a :

A	B	C	D	E
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	$(u_n)$ est divergente	$(u_n)$ est constante	$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 0$	$(u_n)$ est décroissante

**Q18**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{u_n}{u_{n-1}} = e^{-n}$ .

Alors la limite de  $(u_n)$  égale à :

A	B	C	D	E
$e$	$e^{-1}$	$0$	$-\infty$	$+\infty$

**Q19**

Un sac contient 4 boules blanches et 4 boules vertes

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise trois boules su sac

Si la première boule tirée est verte, on la remet dans le sac, puis en tire les deux boules restantes.

La probabilité pour que la première boule tirée soit l'unique boule blanche est :

A	B	C	D	E
$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9^3}$	Toutes les réponses sont fausses

**Q20**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}}$  est égale à :

A	B	C	D	E
$+\infty$	$-\infty$	$1$	$0$	Autre réponse

**Consignes**

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

**Q1**

Un sac  $S_1$  contient 2 boules rouges et 3 boules noires.  
 Un autre sac  $S_2$  contient 3 boules rouges et deux noires.  
 On tire une boule de  $S_1$  si elle est noire on la met dans  $S_2$ , puis on tire une boule de  $S_2$  et si elle est rouge on l'écarte à côté puis on tire une boule de  $S_2$   
 La probabilité de l'événement "La boule tirée du sac  $S_2$  est rouge" est :

A	B	C	D	E
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

**Q2**

On considère le nombre complexe  $z = 2 + \sqrt{3} + i$ . Un argument de  $z$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$

**Q3**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(n) - 1}{\ln(n) + 1} \right)^{\ln(n)} \text{ est :}$$

A	B	C	D	E
$+\infty$	0	1	-1	Autre réponse

**Q4**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2\sqrt{x}} - e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \text{ est :}$$

A	B	C	D	E
0	-2	1	-1	Autre réponse

**Q5**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , la valeur de  $\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{252}{315}$	$\frac{254}{315}$	$\frac{258}{315}$	$\frac{256}{315}$	Autre réponse

**Q6**

La valeur de  $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{2} + 1$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\frac{\pi}{4} - 1$	$\frac{\pi}{4} + 1$	Autre réponse

**Q7**

$\cos \frac{\pi}{16}$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{16} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	Autre réponse

**Q8**

La forme algébrique du nombre  $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$  est :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	Autre réponse

**Q9**

f une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . La négation de la proposition "f est la fonction nulle" est :

A	B	C	D
$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$	$\exists x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$

**Q10**

Soit le nombre complexe  $z = \sqrt{3} + i$  alors  $z^5$  est égale à :

A	B	C	D	E
$\bar{z}$	$-8\bar{z}$	$-16\bar{z}$	$16\bar{z}$	Autre réponse

**Q11**

Soient a et b deux réels la fonction  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ , soit continue en 0 ssi :

A	B	C	D
$a \in \mathbb{R} \text{ et } b = 2$	$a = 0 \text{ et } b = 1$	$a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{1}{2}$	$a \in \mathbb{R} \text{ et } b = -\frac{1}{2}$

**Q12**

La solution de l'équation à variable réel :  $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$ , est :

A	B	C	D	E
$\frac{1 + 7\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$	Toutes les réponses sont fausses

**Q13**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2}$  est :

A	B	C	D	E
1	0	$+\infty$	e	Autre réponse

**Q14**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)}$  est :

A	B	C	D	E
0	-6	$+\infty$	6	Autre réponse

**Q15**

Soit f la fonction définie par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$ , la dérivée de f est :

A	B	C	D
$\frac{5x^2 - x - 12}{\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2 + x - 24}{\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2 + x - 24}{2\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2 + x - 24}{3\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5} \sqrt{(x+3)^5}}$

**Q16**

f une fonction de  $[0; +\infty[$  vers  $[0; +\infty[$  définie par  $f(x) = xe^x$ . l'équation de la tangente à la courbe  $f^{-1}$  au point d'abscisses e est

A	B	C	D
$y = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2e}x + 1$	$y = \frac{1}{2e}x - 1$

Q17

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève. La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D	E
0,4	0,5	0,6	0,7	Autre réponse

Q18

On garde les mêmes données de la question Q17. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon, la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A	B	C	D	E
0,25	0,35	0,45	0,55	Autre réponse

Q19      ENSA

Soient  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation suivante :

$$2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0 \text{ avec } m \in \mathbb{C}^*; z \in \mathbb{C}; m \neq 1 \text{ et } m \neq i$$

Alors  $Im(z_1) \times Im(z_2) =$

A	B	C	D	E
$\frac{1-m^2}{2}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{4}$	Autre réponse

Q20

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan (P) d'équation cartésienne (P):  $2x - y - 2z + 2 = 0$  et la sphère (S) d'équation

(S):  $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$ . Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :

A	B	C	D
$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$

Pour chaque question, il est proposé cinq réponses cocher celle qui est juste.

1) Le produit des deux nombres  $\sqrt[3]{a^2}$  et  $\sqrt[4]{a^3}$  est :

- $\sqrt[7]{a^2(a+1)}$       $a\sqrt[7]{a^2(a+1)}$       $\sqrt[7]{a^5}$       $\sqrt[12]{a^5}$       $a\sqrt[12]{a^5}$

2) Soit la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

La limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est :

- 0      $\frac{1}{3}$       $\frac{1}{4}$       $+\infty$       $-\infty$

3) Soit  $(v_n)_{n \geq 0}$  une suite strictement positive telle que :  $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 0,1$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

La limite de la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est :

- 0,1      $+\infty$      0      $-\infty$      autre

4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé directe on considère le point  $A$  d'affixe  $1+i$  et le point  $B$  d'affixe  $\sqrt{3}-i$ .

4-1) La distance  $AB$  est égale à :

- $2 - \sqrt{2}$       $\sqrt{3} + 1$       $\sqrt{8 - 2\sqrt{3}}$   
  $\sqrt{3} - 1$       $\sqrt{6 + 2\sqrt{3}}$

4-2) Un argument du nombre  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{10}$  est :

- $\frac{\pi}{4}$       $\frac{\pi}{12}$       $\frac{\pi}{6}$       $\frac{5\pi}{12}$      Autre

5) L'intégrale  $\int_0^1 x e^{(x^2)} dx$  est égale à :

- $\frac{1}{2}$       $\frac{e-1}{2}$       $\frac{e+1}{4}$       $e$      Autre

6) La solution de l'équation  $e^x - 5e^{-x} = 4$  est :

- $\ln 2$       $\ln 5$       $-\ln 5$       $2\ln 2$      0

7) Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2)}$

7-1) L'ensemble de définition de la fonction  $f$  est :

- $\mathbb{R}^*$       $\mathbb{R}^{*+}$       $\mathbb{R}^* - \{-1\}$       $\mathbb{R}^* - \{1; -1\}$       $\mathbb{R}^* - \{1; e\}$

7-2) La limite  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  est égale à :

- 0      $+\infty$      1      $-\infty$      autre

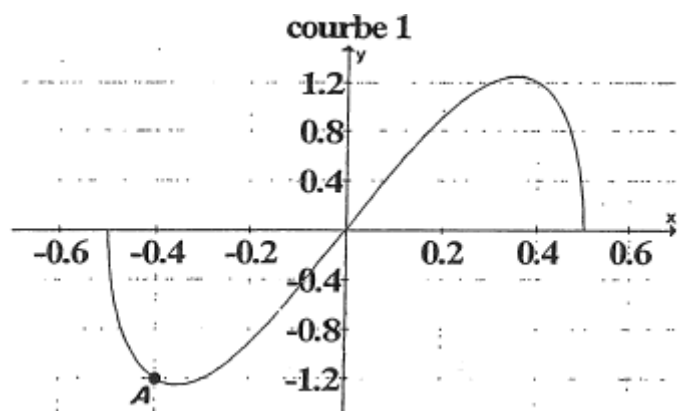
8)  $m$  est un nombre strictement positif, soient le plan  $(P_m)$  :  $x - y + 2z - m = 0$  et la sphère  $(S)$  :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

La valeur de  $m$  pour laquelle le plan  $(P_m)$  est tangent à la sphère  $(S)$  est :

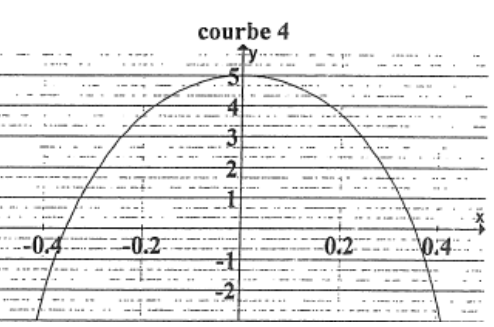
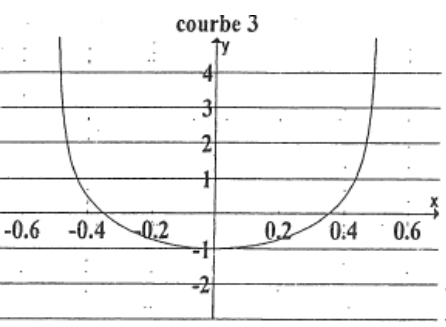
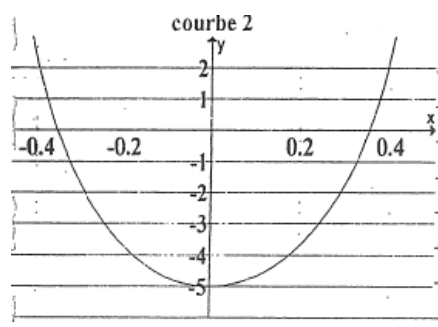
- $\sqrt{6}$       $2\sqrt{6}$       $6\sqrt{6}$       $\frac{\sqrt{6}}{6}$       $2\sqrt{3}$



I.  $f$  est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$  et la courbe qui la représente et la suivante .



<b>01</b>	Parmi les courbes suivantes ( 2 , 3 et 4 ) la quelle représente $f'$ fonction dérivée de $f$
Réponse	



**02** Répondre par oui ou par non aux propositions suivantes :

a.	$f''$ est négatif pour tout $x \in ]-\frac{1}{2}; 0[$	Oui	Non

b.	$f''$ s'annule pour $x = 0$	Oui	Non

<b>03</b>	Donner l'équation de la tangente à $C_f$ au point $A(\frac{-2}{5}; \frac{-6}{5})$
Réponse	$y = \dots\dots\dots$

**II.** Dans le plan complexe, déterminer L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $Z$  tel que :  
 $|\bar{Z} - 3 + 2i| = 2$

Réponse : L'ensemble des points :  
.....  
.....  
.....

**III.** Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x = \dots\dots\dots ; ; ; ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - 2} - \sqrt{3x^2 + x} =$

.....

**IV.** Calculer :

$\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 1} = \dots\dots\dots ; ; ; ; \int_0^1 \cos^4(x) \sin(x) dx = \dots\dots\dots$

**V.** On considère la suite numérique  $(U_n) n \in \mathbb{N}$  définie par :  $U_0 = 2$  et  $\ln(u_{n+1}) = 2 + \ln(u_n)$

**01** Ecrire  $U_1$  en fonction de  $e$

Réponse  $U_1 = \dots\dots\dots$   
.....

**02** Ecrire  $U_{n+1}$  en fonction de  $U_n$

Réponse  $U_{n+1} = \dots\dots\dots$   
.....

**03** Donner le sens de variation de  $(U_n)$

Réponse :  
.....  
.....

**04** Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

Réponse  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \dots\dots\dots$

**Q1**  $(u_n)_n$  une suite arithmétique telle que  $u_2 + u_3 + u_4 = 21$  et  $u_6 = 25$  donc son premier terme est :

- A** -25                      **B** -16                      **C** -11                      **D** 1                      **E** -10

**Q2** La valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} + (n^2)^{\frac{1}{n}} \right)$  est :

- A** 2                      **B**  $+\infty$                       **C** 3                      **D** 0                      **E** 1

**Q3** Soit h la fonction définie par  $h(x) = \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$  pour  $x \neq \frac{\pi}{3}$  et  $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = a$ , la valeur de a pour laquelle h est continue en  $\frac{\pi}{3}$  est :

- A** 2                      **B** 0                      **C** 1                      **D** -2                      **E** -1

**Q4** Le domaine de définition de la fonction définie par  $f(x) = \ln(5 - |x - 1| - |5x - 1|)$  est :

- A**  $]-\frac{1}{2}, 0[$                       **B**  $]-\frac{1}{2}, \frac{7}{6}[$                       **C**  $]0, \frac{7}{6}[$                       **D**  $]-\infty, 0$                       **E**  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}[$

**Q5** Soit la fonction  $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 100x^{99}$ , donc la valeur de  $f^{-1}$  est :

- A** 51                      **B** -52                      **C** 50                      **D** -50                      **E** -51

**Q6** La valeur de  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 1} dx$  est :

- A**  $\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)$                       **B**  $\frac{4}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$                       **C**  $\frac{2}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{30}{\sqrt{5}+1}\right)$                       **D**  $-\frac{2}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$                       **E**  $\frac{2}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

**Q7** On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  le polynôme :  
 $p(z) = z^3 + \sqrt{3} - i z^2 + 1 - i\sqrt{3} z - i$ , donc l'ensemble de solutions de  $p(z) = 0$  est :

الصفحة 1/2	مباراة ولوج كليات الطب و الصيدلة و كليتي طب الاسنان الرباط برسم السنة الجامعية 2011 - 2012 - غشت 2012 الصيغة الفرنسية للاختبار <b>MATHEMATIQUES</b> la Composante:
---------------	--

A  $S = \left\{ i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$        B  $S = \left\{ -i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$        C

$S = \left\{ i, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i, -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i \right\}$        D  $S = i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i$        E  $S = -i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i$

**Q8** La fonction primitive de la fonction  $\cos x \cos 2x$  qui s'annule en 0 est:

A  $\frac{1}{3} \sin x^3 - \sin x$        B  $\sin x + \frac{2}{3} \sin 2x$        C  $\sin x - \frac{2}{3} \sin x^3$        D  $\frac{1}{2} \sin x^2 \sin(2x)$        E  $\sin x \sin 2x$

**Q9** Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$  et  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $O, \vec{i}, \vec{j}$ , équation cartésienne de la tangente de  $C$  au point d'abscisse  $e^{-\frac{1}{2}}$  est :

A  $y = x - \frac{1}{2}$        B  $y = x + \frac{1}{2}$        C  $y = \frac{e}{2}x$        D  $y = -\frac{e}{2}x + 1$        E  $y = \frac{e}{2} + x$

**Q10** On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives  $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_B = -1 - i$  et  $z_C = -2 + \sqrt{3} + i$ , donc le triangle ABC

A rectangle en A       B rectangle en B       C rectangle en C       D n'est pas rectangle       E équilatéral

الصفحة 1/1	مباراة ولوج كلية طب الاسنان- الرباط برسم السنة الجامعية 2013 - 2014 - يوليوز 2013 la Composante: MATHEMATIQUES الصيغة الفرنسية للاختبار
01	<p>Soit <math>f</math> la fonction de la variable réelle <math>x</math> définie sur <math>[0, \pi]</math> par :</p> $f(x) = \sin(2x) - 2x\cos(2x) - \frac{\pi}{2}$ <p>Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle fausse</p> <p>1] <math>f'(x) = 4x\sin(2x)</math> pour tout <math>x</math> de <math>[0, \pi]</math></p> <p>2] L'ensemble solution de l'équation <math>f'(x) = 0</math> dans <math>[0, \pi]</math> est : <math>S = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}</math></p> <p>3] <math>f'(x) &lt; 0</math> sur <math>[0, \frac{\pi}{2}]</math></p> <p>4] Il existe un réel unique <math>\alpha</math> dans <math>[0, \frac{\pi}{2}]</math> solution de l'équation <math>f(x) = 0</math></p>
02	<p>Soit <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> la suite de terme général <math>u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx</math></p> <p>Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle fausse</p> <p>1] <math>u_0 + u_1 = 1</math></p> <p>2] <math>u_1 = 1 - \ln(1 + e)</math></p> <p>3] <math>u_0 = \ln(1 + e) - \ln 2</math></p> <p>4] <math>(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}</math></p>
03	<p>On pose <math>z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}}</math></p> <p>Indiquer sur votre copie, pour chaque question, la réponse exacte parmi les réponses proposées</p> <p>1] Quelle est la forme exponentielle de <math>z^2</math> ?</p> <p>a] <math>4e^{i\frac{\pi}{6}}</math>   b] <math>4e^{-i\frac{\pi}{6}}</math>   c] <math>4e^{i\frac{5\pi}{6}}</math>   d] <math>4e^{-i\frac{5\pi}{6}}</math></p> <p>2] Quelle est la forme exponentielle de <math>z</math> ?</p> <p>a] <math>2e^{i\frac{\pi}{12}}</math>   b] <math>4e^{-i\frac{5\pi}{12}}</math>   c] <math>4e^{i\frac{5\pi}{12}}</math>   d] <math>2e^{-i\frac{\pi}{12}}</math></p> <p>3] Quelle est l'angle dont les nombres <math>\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}</math> et <math>\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}</math> sont respectivement le cosinus et le sinus</p> <p>a] <math>\frac{\pi}{12}</math>   b] <math>-\frac{5\pi}{12}</math>   c] <math>\frac{5\pi}{12}</math>   d] <math>-\frac{\pi}{12}</math></p>
04	<p>Soit <math>g</math> la fonction de la variable réelle <math>x</math> définie par : <math>g(x) = \ln\left(\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right)</math></p> <p>Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle fausse</p> <p>1] Le domaine de définition <math>D</math> de <math>g</math> est <math>] -\infty, 0]</math></p> <p>2] <math>g'(x) = \frac{-2e^{-x}}{1-e^{2x}}</math></p> <p>3] Pour tout <math>x</math> de <math>D</math> on a : <math>g'(x) &gt; 0</math></p> <p>4] Le nombre <math>\ln\left(\frac{e-1}{1+e}\right)</math> est la seule solution de l'équation <math>g(x) = -1</math></p>

**Concours d'accès à la faculté de médecine de Fès**

**Année universitaire 2013-2014**

<p><b>Question 1</b></p>	<p><b>Le domaine de définition de la fonction :</b></p> <p><math>F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math></p> <p><math>x \mapsto \sqrt{x^4 - x^2}</math></p> <p><b>est :</b></p>	<p>(A) : <math>\mathbb{R}</math></p> <p>(B) : <math>] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[ \cup \{0\}</math></p> <p>(C) <math>\emptyset</math></p> <p>(D) : <math>[0, +\infty[</math></p> <p>(E) : <math>] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[</math></p>
<p><b>Question 2</b></p>	<p><b>Une urne contient 5 boules blanches, 4 vertes et 3 rouges .</b></p> <p><b>On tire simultanément 4 boules de cette urne. Le nombre de tirages contenant au moins une boule non blanches est :</b></p>	<p>(A) : <math>C_{12}^4 - C_5^4</math></p> <p>(B) : <math>C_{12}^4 - C_7^4</math></p> <p>(C) : <math>A_{12}^4 - A_5^4</math></p> <p>(D) : <math>C_5^4</math></p> <p>(E) : <math>C_{12}^4</math></p>
<p><b>Question 3</b></p>	<p><b>Le module du nombre complexe :</b></p> <p><math>\frac{2012-2013i}{2012+2013i}</math></p> <p><b>est :</b></p>	<p>(A) : 4025</p> <p>(B) : <math>\sqrt{2012^2 + 2013^2}</math></p> <p>(C) : <math>\sqrt{2012 + 2013}</math></p> <p>(D) : 1</p> <p>(E) : -1</p>
<p><b>Question 4</b></p>	<p><b>La forme exponentielle du nombre complexe :</b></p> <p><math>1 + e^{i\frac{8\pi}{7}}</math></p> <p><b>est :</b></p>	<p>(A) : <math>e^{i\frac{8\pi}{7}}</math></p> <p>(B) : <math>2\cos(\frac{11\pi}{7})e^{i\frac{11\pi}{7}}</math></p> <p>(C) : <math>2\cos(\frac{4\pi}{7})e^{i\frac{11\pi}{7}}</math></p> <p>(D) : <math>-e^{i\frac{8\pi}{7}}</math></p> <p>(E) : <math>2\sin(\frac{4\pi}{7})e^{i\frac{11\pi}{7}}</math></p>
<p><b>Question 5</b></p>	<p><b>L'intersection de la sphère :</b></p> <p><math>S(\Omega(-1, 0, 1); R = 1)</math></p> <p><b>et la droite (AB) où</b></p> <p><math>A(-1, 0, 1)</math><b>et</b> <math>B(1, 0, 1)</math></p> <p><b>est :</b></p>	<p>(A) : deux points</p> <p>(B) : un segment</p> <p>(C) : Un demi-cercle</p> <p>(D) : l'ensemble vide</p> <p>(E) : un point</p>
<p><b>Question 6</b></p>	<p><b>Soit a un nombre réel strictement positif.</b></p>	<p>(A) : <math>y(x) = \alpha \cos(ax) + \beta \sin(ax)</math></p> <p>(B) : <math>y(x) = \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax}</math></p>

	<p>La solution générale de l'équation différentielle :</p> $y'' + ay = 0$ <p>est l'ensemble des fonctions <math>y</math> définies sur <math>\mathbb{R}</math> par :</p>	<p>(C) : <math>y(x) = \alpha e^{ax} + \beta</math></p> <p>(D) : <math>y(x) = (\alpha x + \beta)e^{ax}</math></p> <p>(E) : <math>y(x) = \alpha \cos(\sqrt{ax}) + \beta \sin(\sqrt{ax})</math></p> <p>avec <math>\alpha</math> et <math>\beta</math> deux nombres réels.</p>
<p>Question 7</p>	<p>La valeur de l'intégrale :</p> $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$ <p>est :</p>	<p>(A) : <math>I = \frac{\pi}{4}</math></p> <p>(B) : <math>I = \ln(\sqrt{2})</math></p> <p>(C) : <math>I = \ln(2)</math></p> <p>(D) : <math>I = 1</math></p> <p>(E) : <math>I = 0</math></p>
<p>Question 8</p>	<p>La fonction primitive de la fonction <math>\ln</math> sur l'intervalle <math>]0; +\infty[</math> s'annulant en <math>\sqrt{e}</math> est la fonction <math>F</math> définie sur <math>]0; +\infty[</math> par :</p>	<p>(A) : <math>F(x) = x \ln(x) - x - \sqrt{e}</math></p> <p>(B) : <math>F(x) = e^x</math></p> <p>(C) : <math>F(x) = x \ln(x) - x + \frac{\sqrt{e}}{2}</math></p> <p>(D) : <math>F(x) = - \int_{\sqrt{e}}^x \ln(t) dt</math></p> <p>(E) : <math>F(x) = x \ln(x) - x + \sqrt{e}</math></p>
<p>Question 9</p>	<p>La limite de la suite récurrente convergente définie par :</p> $U_0 = 2013 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} = \ln(U_n) + 1$ <p>est :</p>	<p>(A) : n'existe pas</p> <p>(B) : <math>-\infty</math></p> <p>(C) : <math>\ln(2013)</math></p> <p>(D) : <math>+\infty</math></p> <p>(E) : <math>\ln(e)</math></p>
<p>Question 10</p>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \ln(x)}{\sqrt[3]{x} - x^3} =$	<p>(A) : 0</p> <p>(B) : 1</p> <p>(C) : <math>+\infty</math></p> <p>(D) : <math>-\infty</math></p> <p>(E) : -1</p>

<b>01</b>	<b>Le domaine de définition de la fonction :</b> $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow \sqrt{x^4 - x^2}$ <b>est :</b>
-----------	---

- A**  $\mathbb{R}$     
 **B**  $-\infty, -1 \cup 1, +\infty \cup 0$     
 **C**  $\emptyset$     
 **D**  $0, +\infty$     
 **E**  $-\infty, -1 \cup 1, +\infty$

<b>02</b>	<b>Une urne contient 5 boules blanches, 4 vertes et 3 rouges.</b> <b>On tire simultanément 4 boules de cette urne. Le nombre de tirages contenant au moins une boule non blanche est :</b>
-----------	---

- A**  $C_{12}^4 - C_5^4$     
 **B**  $C_{12}^4 - C_7^4$     
 **C**  $A_{12}^4 - A_5^4$     
 **D**  $C_5^4$     
 **E**  $C_{12}^4$

<b>03</b>	<b>Le module du nombre complexe</b> $\frac{2012 - 2013i}{2012 + 2013i}$ <b>est :</b>
-----------	--

- A** 4025    
 **B**  $\sqrt{2012^2 + 2013^2}$     
 **C**  $\sqrt{2012 + 2013}$     
 **D** 1    
 **E** -1

<b>04</b>	<b>La forme exponentielle du nombre complexe :</b> $1 + e^{i\frac{8\pi}{7}}$ <b>est :</b>
-----------	---

- A**  $e^{i\frac{8\pi}{7}}$     
 **B**  $2 \cos(\frac{4\pi}{7}) e^{i\frac{11\pi}{7}}$     
 **C**  $2 \cos(\frac{4\pi}{7}) e^{i\frac{11\pi}{7}}$     
 **D**  $-e^{i\frac{8\pi}{7}}$     
 **E**  $2 \sin(\frac{4\pi}{7}) e^{i\frac{11\pi}{7}}$

<b>05</b>	<b>L'intersection de la sphère : <math>S(\Omega(-1,0,1); R=1)</math> et la droite (AB) où</b> $A(-1,0,1)$ et $B(1,0,-1)$ <b>est :</b>
-----------	---

- A** Deux points    
 **B** Un segment    
 **C** Un demi-cercle    
 **D** L'ensemble vid    
 **E** Un point

<b>06</b>	<p>Soit <math>a</math> un nombre réel strictement positif.</p> <p>La solution générale de l'équation différentielle : <math>y'' + ay = 0</math> est l'ensemble des fonctions <math>y</math> définies sur <math>\mathbb{R}</math> par :</p>
-----------	--

- A**  $\alpha \cos(ax) + \beta \sin(ax)$     
 **B**  $\alpha e^{ax} + \beta e^{-ax}$     
 **C**  $\alpha e^{ax} + \beta$     
 **D**  $(\alpha x + \beta)e^{ax}$
- E**  $\alpha \cos(\sqrt{ax}) + \beta \sin(\sqrt{ax})$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels

<b>07</b>	<p>La valeur de l'intégrale : <math>I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx</math> est :</p>
-----------	--

- A**  $\frac{\pi}{4}$     
 **B**  $\ln(\sqrt{2})$     
 **C**  $\ln(2)$     
 **D** 1    
 **E** 0

<b>08</b>	<p>La fonction primitive de la fonction <math>\ln</math> sur l'intervalle <math>]0, +\infty[</math> s'annulant en <math>\sqrt{e}</math> est la fonction <math>F</math> définie sur <math>]0, +\infty[</math> par :</p>
-----------	--

- A**  $F(x) = x \ln x - x - \sqrt{e}$     
 **B**  $F(x) = e^x$     
 **C**  $F(x) = x \ln x - x - \frac{\sqrt{e}}{2}$
- D**  $F(x) = -\int_{\sqrt{e}}^x \ln(t) dt$     
 **E**  $F(x) = x \ln x - x + \sqrt{e}$

<b>09</b>	<p>La limite de la suite récurrente convergente définie par :  <math>u_0 = 2013</math> et <math>(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \ln(u_n) + 1</math> est :</p>
-----------	---

- A** n'existe pas    
 **B**  $-\infty$     
 **C**  $\ln(2013)$     
 **D**  $+\infty$     
 **E**  $\ln(2)$

<b>10</b>	<p><math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \ln(x)}{\sqrt[3]{x} - x^3} =</math></p>
-----------	--

- A** 0    
 **B** 1    
 **C**  $+\infty$     
 **D**  $-\infty$     
 **E** -1

الصفحة 1/2	مباراة ولوج كليات الطب و الصيدلة و كليتي طب الاسنان برسم السنة الجامعية 2016 - 2015 - غشت 2015 la Composante: MATHEMATIQUES الصيغة الفرنسية للاختبار
---------------	--

I. Soit  $f$  une fonction numérique définie par :  $f(x) = e^x (\cos x - \sin x)$

On note  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonctions  $f$  dans un repère orthonormé

01	Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ?
02	Déterminer les coordonnées du point $A(x; f(x))$ ou passe la droite tangente horizontale à la courbe représentative $(C_f)$ de la fonction $f$ ?
03	Répondre par vrai ou fausse sans justification les assertions suivantes : <input type="checkbox"/> A - la fonction $f$ est décroissante dans l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ <input type="checkbox"/> B - la fonction $f$ est décroissante dans l'intervalle $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$
04	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2}{3 - x^2}$ ?
05	Calculer $J = \int_0^1 \frac{x}{2x^4 + 3x^2 + \frac{9}{8}} dx$ ?

II. Soient A ; B et C trois points du plan complexe d'affixe respectives :

$$z_A = 2 - 4i \quad ; \quad z_B = 4 + 2i \quad ; \quad z_C = 8 - 6i$$

On pose :

$$W = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$$

06	Déterminer le conjugué et l'argument du nombre complexe $W$ ?
07	Déterminée la nature du triangle $ABC$ ?

III. Dans une solution nourrissante, on met 1000 bactéries d'une espèce quelconque. On constate que la bactérie se multiplie 50% par jour. On désigne par  $u_n$  le nombre de la bactérie présenté dans la solution le jour «  $n$  ».

08	Déterminer la nature de la suite ?
09	Déterminer la raison de la suite ?

**IV. Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : Certaines sont blanches et d'autres sont noires. Elles peuvent être soit décorées soit non décorées. Nous avons 3 boules noires, 7 sont décorées et une est à la fois noire et décorée. Pour répondre aux deux questions suivantes, veuillez utiliser exclusivement les suggestions suivantes**

<b>0</b>	<b>0,166</b>	<b>0,216</b>	<b>0,344</b>	<b>0,900</b>	<b>1</b>
----------	--------------	--------------	--------------	--------------	----------

<b>10</b>	<b>On tire au hasard une boule de l'urne. Déterminer la probabilité de tirer une boule noire ou décorées ?</b>
-----------	--

<b>11</b>	<b>On tire au hasard et avec remise trois boules de l'urne. Déterminer la probabilité de tirer trois boules blanches et décorées ?</b>
-----------	--

01 L'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{e^{-2x}-e}}{x+e}$  est :

- A  $]-\infty, -e[ \cup ]-e, -\frac{1}{2}[$      B  $]-\infty, -\frac{1}{2}[$      C  $]-\infty, -e[ \cup ]-e, -\frac{1}{2}[$      D  $\mathbb{R} - \{e\}$      E  $]-\infty, -e[$

02 La dérivée de la fonction définie sur  $]0, \frac{\pi}{4}[$  par  $f(x) = \ln(\cos(x^2))$  est la fonction définie sur  $]0, \frac{\pi}{4}[$  par :

- A  $f'(x) = -2$      B  $f'(x) = 2x \tan(x^2)$      C  $f'(x) = 2x \frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}$   
 D  $f'(x) = -2x \frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}$      E  $f'(x) = -2x \tan(x^2)$

03 La valeur de l'intégrale  $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln(x))} dx$  est :

- A  $I = \sqrt{e} - 1$      B  $I = \ln(2)$      C  $I = \sqrt{e} - \ln(2)$      D  $I = \ln(2) - 1$      E  $I = \sqrt{e}$

04 La limite de la suite de terme générale :  $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$  est :

- A  $+\infty$      B  $-\infty$      C  $0$      D *n'existe pas*     E  $-1$

05 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé l'ensemble des points M vérifiant  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$  tels que A et B deux points distincts est :

- A L'ensemble  $\{A, B\}$      B Le cercle de centre A     C L'ensemble vide     D Le cercle de centre B     E Le cercle de diamètre  $[AB]$

06 Deux urnes contiennent 12 jetons indiscernables au touché distribués comme suit

L'urne	$U_1$	$U_2$
Nombre de jetons rouge	4	3
Nombre de jetons vert	3	2

On tire simultanément deux jetons de  $U_1$  et un jeton de  $U_2$ . La probabilité d'obtenir 3 jetons rouge est :

- A  $p = \frac{6}{35}$      B  $p = \frac{c_7^3}{c_{12}^3}$      C  $p = \frac{c_3^2}{c_5^2} \times \frac{c_4^1}{c_7^1}$      D  $p = -\frac{c_3^2}{c_5^2} \times \frac{c_4^1}{c_7^1}$      E  $p = 1, 2$

07 Le nombre complexe  $1 + e^{2015i\pi}$  est :

- A Strictement positif     B Imaginaire pur et non nul     C Strictement négatif  
 D Nul     E Egale à 2

08 La solution générale de l'équation différentielle :  $y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0$  est les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$y(x) = (ax + b)e^{-\pi x}$    
  $y(x) = ae^{\pi x} + be^{-\pi x}$    
  $y(x) = e^{-\pi x}(a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x))$   
  $y(x) = a\cos(\sqrt{\pi}x + b)$    
  $y(x) = a\cos(\pi x + b)$

09 Dans l'ensemble des nombres complexes l'équation  $z^3 + 1 = 0$  admet :

- deux solutions   
 une solution unique   
 trois solutions  
 quatre solutions   
 cinq solutions

010 La limite de la suite de terme générale  $V_n = 3^{n+1} - e^{n+1}$  est :

- $\frac{e}{3}$    
  $+\infty$    
  $3 - e$    
  $+\infty$    
  $\frac{3}{e}$

011 On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})^x$ . alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  égale à

- $e$    
  $+\infty$    
 n'existe pas   
 1   
 0

012 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le produit scalaire  $\vec{i} \cdot (\vec{i} \wedge \vec{j})$  égale à

- $\vec{j}$    
 1   
  $\vec{0}$    
  $-\vec{j}$    
 0

013 L'espérance mathématique d'une variable aléatoire binomiale de paramètres  $n = 16$  et  $p = 0,25$  est :

- 4   
 3   
 -4   
 16   
 -3

014 On considère la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_n = -2$  et  $U_{n+1} = \frac{U_n^3}{3}$ . la limite de  $(U_n)$  est :

- n'existe pas   
  $-\infty$    
 0   
  $\sqrt{3}$    
  $-\sqrt{3}$

015 L'équation  $x(1 - \ln^2(x + 2)) = x$  admet :

- admet une solution unique dans  $] -2, +\infty[$    
  
 n'admet pas de solution dans  $[0, +\infty[$    
  
 admet une solution unique dans  $]0, +\infty[$    
  
 admet deux solutions dans  $] -2, +\infty[$    
  
 n'admet pas de solution dans  $] -2, 0[$

016 La valeur de l'intégrale  $J = \int_{-1}^1 e^{x^2} \sin(x) dx$  est :

- 2   
 -1   
 0   
 1   
 2

Université Cadi Ayyad

Faculté de médecine et de pharmacie Marrakech

Dans chaque question cochez la bonne réponse.

<b>01</b>	<b>Soient <math>m</math> une constante de <math>\mathbb{R}</math> et <math>h</math> la fonction définie sur <math>\mathbb{R}_+^*</math> par :</b> $h(x) = x^m - \ln x^2$
-----------	---

- A** Si  $m > 0$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$
- B** Si  $m < 0$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$
- C** Si  $m < 0$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$
- D** Si  $m \leq 0$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$
- E** Si  $m > 0$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

<b>02</b>	<b>Soit <math>u_n</math> la suite définie par <math>u_n = \frac{-1^n}{n^2}</math>; <math>n \in \mathbb{N}</math> et <math>n \neq 0</math>. La suite <math>u_n</math> <math>_{n \geq 1}</math> est :</b>
-----------	---

- A** Monotone.
- B** Convergente.
- C** Négative.
- D** Décroissante et minorée.
- E** Croissante et minorée.

<b>03</b>	
-----------	--

- A** La partie réelle de  $(1-i)^5$  est  $\sqrt{2}$ .
- B** La partie imaginaire de  $(1+i)^{20}$  est 42.

**C**  $1+i^{20}$  est réel.

**D** L'équation  $z^4-1=0$  possède une et une seule solution dans  $\mathbb{C}$ .

**E** L'équation  $z^4-1=0$  possède trois solutions distinctes dans  $\mathbb{R}$ .

<b>04</b>	Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^x & ; \text{si } x < 0 \\ \cos x & ; \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
-----------	---

**A** L'équation  $f(x)=0$  possède trois solutions dans l'intervalle  $-\infty; 2\pi$ .

**B**  $f$  n'est pas continue en 0.

**C**  $f$  est dérivable en 0.

**D** L'équation  $f(x)=0$  possède deux solutions dans l'intervalle  $-\infty; \pi$ .

**E** L'équation  $f(x)=0$  possède une et une seule solution dans l'intervalle  $-\infty; \pi$ .

<b>05</b>	
-----------	--

**A**  $\int_2^e \frac{1}{x \ln x} dx = -2$ .

**B**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\frac{1}{2} \ln 2$ .

**C**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \ln 2$ .

**D**  $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 4 + 2\sqrt{e}$ .

**E**  $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 4 - 2\sqrt{e}$ .

<b>06</b>	Soient $f$ et $g$ les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt .$
-----------	--

**A** L'image de  $\mathbb{R}$  par  $f$  est  $0; 1$ .

**B** L'image de  $\mathbb{R}$  par  $f$  est  $0; +\infty$ .

**C** La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;  $g'(x) = f(x) - f(x+1)$ .

**D** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;  $g(x) < 0$ .

**E** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;  $0 \leq g(x) < \frac{1}{2}$ .

**07** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels strictement positifs.

**A** Si  $n^2 + np + p^2$  est pair, alors  $n$  est impaire et  $p$  est pair.

**B** Si  $n^2 + np + p^2$  est pair, alors  $n$  est paire et  $p$  est impair.

**C** Si  $n^2 + np + p^2$  est pair, alors  $np$  est impair.

**D** Si  $n^2 + np + p^2$  est pair, alors  $n$  et  $p$  sont pairs.

**E** Si  $n^2 + np + p^2$  est pair, alors  $n$  et  $p$  sont impairs.

**08**

**A**  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2}{\cos^2 x} dx = 1 - \sqrt{2}$ .

**B**  $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2}{\cos^2 x} dx = 2(1 - \sqrt{2})$ .

**C**  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x} dx = 4(\sqrt{2} - 1)$ .

**D**  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x} dx = 4$ .

**E**  $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2}{\cos^2 x} dx = 4(1 - \sqrt{2})$ .

**09**

Soient  $u_n$  et  $v_n$  deux suites définies pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$u_n = \frac{e^n}{n^n} \quad \text{et} \quad v_n = \ln u_n.$$

**A** La suite  $u_n$  et la suite  $v_n$  ont la même limite.

**B** La suite  $v_n$  est strictement croissante.

**C** La suite  $u_n$  est strictement croissante.

**D** La suite  $u_n$  est bornée.

**E** La suite  $u_n$  admet une limite et cette limite est non nulle.

الصفحة 1/2	مباراة ولوج كليات الطب و الصيدلة و كليتي طب الاسنان برسم السنة الجامعية 2020 - 2021 - غشت 2020 la Composante: MATHEMATIQUES الصيغة الفرنسية للاختبار
---------------	--

10	<p>On considère la suite <math>u_n</math> <math>n \in \mathbb{N}</math> définie par <math>u_0 = 1</math> et pour tout <math>n \in \mathbb{N}</math>,</p> $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$ <p>On définit la suite <math>v_n</math> <math>n \in \mathbb{N}</math> par, pour tout <math>n \in \mathbb{N} : v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}</math>.</p>
----	--

- A Pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,  $u_n \leq n - 3$ .
- B Pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,  $u_n \geq n - 3$ .
- C La limite de la suite  $u_n$  est finie.
- D La suite  $u_n$   $n \in \mathbb{N}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  et de premier terme  $\frac{25}{2}$ .
- E Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n + \frac{21}{4}$ .

Q1	<p>Soit <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> une suite arithmétique de raison <math>r</math> et de premier terme <math>U_0 = 2</math>. Alors <math>r</math> égal à :</p>
----	---

- A 3       B - 6       C 6       D 3       E 4

Q2	<p>Soit <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> une suite géométrique de raison <math>q</math> et de premier terme <math>U_1 = 9</math> tel que <math>u_9 = 1280</math>. Alors <math>q</math> égal à :</p>
----	--

- A  $\frac{1}{3}$        B  $\frac{1}{2}$        C 3       D 2       E  $\frac{1}{4}$

Q3	<p>On pose <math>S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}</math>; pour tout <math>n</math> dans <math>\mathbb{N}</math>. Alors <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =</math></p>
----	---

- A  $\frac{1}{3}$        B  $\frac{1}{2}$        C 2       D 3       E 1

Q4	<p>Combien de nombres à trois chiffres pouvons-nous créer à partir des nombres</p>
----	--

6, 7, 8 et 9 ?

A  $C_4^3$

B 9

C  $4^3$

D  $3^4$

E  $4 \times 3$

Q5

Un sac contient deux boules blanches et trois boules noires qui ne peuvent pas être distinguées au toucher. On tire deux boules au hasard dans le sac. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur ?

A  $\frac{1}{4}$

B  $\frac{2}{5}$

C  $\frac{3}{5}$

D  $\frac{1}{10}$

E  $\frac{3}{10}$

Q6

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 - \ln x} =$$

A  $+\infty$

B  $-\infty$

C 1

D -1

E 0

Q7

le nombre complexe  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}$  égal à :

A 1

B -1

C 2

D -2

E  $\frac{1}{2}$

Q8

La domaine de la fonction  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{4-(\ln x)^2}}$  est :

A  $] -\infty; e^2[$

B  $] e^2; +\infty[$

C  $] e^{-2}; e^2[$

D  $] 0; e^2[$

E  $\mathbb{R}^*$

Q9

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On considère les deux courbes représentant les fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $g(x) = x^2$ . Alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe des fonctions  $f$  et  $g$  et les droites définies par les équations  $x = 0$  et  $x = 2$  est égal à :

A  $\frac{2+\sqrt{5}}{-2}$

B  $\frac{1}{2}$

C  $\frac{2-\sqrt{5}}{3}$

D  $\frac{5}{2}$

E  $\frac{(2-\sqrt{5})2}{3}$

Q10

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \cos(e^x)$ , et  $(C_f)$  sa courbe représentative de  $f$  dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Alors l'équation de la tangente de  $(C_f)$  en le point  $x = 0$  est :

A  $y = \cos 1$

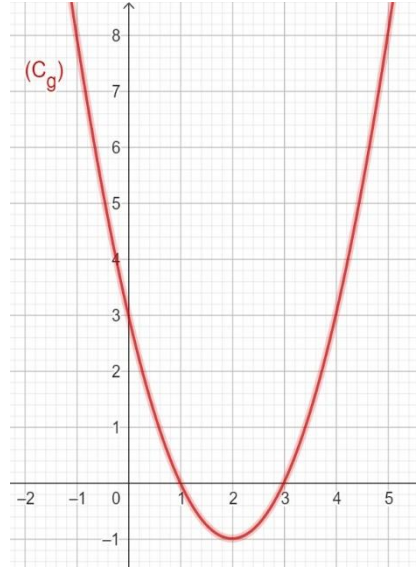
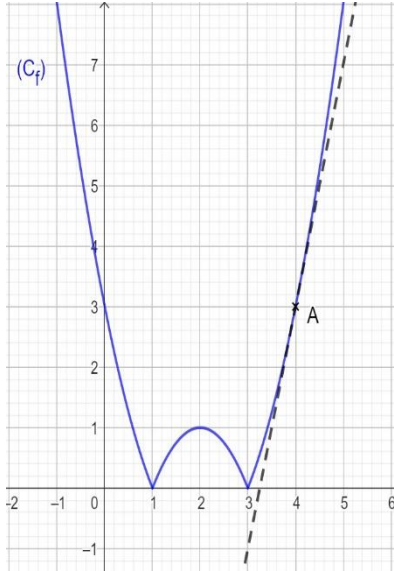
B  $y = -\sin 1$

C  $-(\sin 1)x + \cos 1$

D  $-(\cos 1)x + \sin 1$

E  $y = 1$

I - Soient  $(C_f)$  et  $(C_g)$  les courbes représentatives respectives des deux fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  et  $(\Delta)$  une droite tangente à la courbe  $(C_f)$  en point  $A(4 ; 3)$ .



1 - En déduire, d'après la courbe de  $(C_f)$ , la valeur de  $f'(2)$

$$f'(2) =$$

2 - Déterminer l'équation  $y = ax + b$  de la droite  $(\Delta)$  et donner les valeurs de  $a$  et  $b$ .

$$a =$$

$$b =$$

3 - On donne  $g(x) = x^2 - 4x + 3$ , cocher la bonne réponse

3 - a -  $f(x) = -g(x)$

3 - b -  $f(x) = g(x) + 1$

3 - c -  $f(x) = |g(x)|$

II - Donner le domaine de définition  $D_h$  de la fonction  $h(x)$  telle que :  $h(x) = \ln(-x) \sqrt{1 - \ln(4x^2)}$

$$D_h =$$

III - Calculer :

$$\int_{-\frac{9}{2}}^{-1} \frac{4x + 1}{\sqrt{2x^2 + x}} dx =$$

IV - Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x}} =$$

V - Dans un repère orthonormé, Soient (P) le plan d'équation cartésienne :  $x + 2y - z = 3$  et (P') le plan d'équation cartésienne :  $3x + 2y + z = 5$ . On pose  $z = t$ .

Parmi ces propositions ci-dessous (A, B, C), quelle est la représentation paramétrique de la droite ( $\Delta$ ) l'intersection de (P) et (P').

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
$(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1/3 \\ z = 3t \end{cases}$	$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$	$(\Delta) : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$

La représentation paramétrique de la droite ( $\Delta$ ) est :

VI - Une caisse contient 5 boules rouges, 3 boules noires et une boule 1 noire.

Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire de la caisse 3 boules en même temps.

Calculer les probabilités  $P_A$  et  $P_B$  des événements suivants :

Probabilité A : Deux boules sont au moins rouges.

$P_A =$

Probabilité B : Deux boules sont au moins de même couleur.

$P_B =$

On utilise seulement les propositions suivantes pour répondre aux questions précédentes :

0	$\frac{5}{28}$	$\frac{16}{84}$	$\frac{50}{84}$	$\frac{23}{84}$	$\frac{26}{42}$	1
---	----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	---

01  $(u_n)$  est une suite arithmétique décroissante. Son premier terme  $u_0 = 2$ , sa raison  $r$  tel que :  $4(u_1)^2 + (u_2)^2 = 164$ . La valeur de  $r$  est :

- A 3       B -6       C 6       D -3       E 4

02  $(u_n)$  est une suite géométrique décroissante. Son premier terme  $u_1 = 5$ , sa raison est  $q > 0$  tel que :  $u_9 = 1280$ . La valeur de  $q$  est :

- A  $\frac{1}{3}$        B  $\frac{1}{2}$        C 3       D 2       E  $\frac{1}{4}$

03 Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

- A  $\frac{1}{3}$        B  $\frac{1}{2}$        C 2       D 3       E 1

04 Combien de nombre, composé de 3 chiffres, peut-on composer à partir des chiffres 6, 7, 8, 9?

- A  $C_4^3$        B 9       C  $4^3$        D  $3^4$        E  $4 \times 3$

05 Un sac contient deux boules blanches et trois boules noires, qu'on ne peut pas distinguer par le touché. On tire au hasard et en même temps deux boules du sac. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur?

- A  $\frac{1}{4}$        B  $\frac{2}{5}$        C  $\frac{3}{5}$        D  $\frac{1}{10}$        E  $\frac{3}{10}$

06  $\lim_{0^+} \frac{\ln x}{1 - \ln x}$  est égal à :

- A  $+\infty$        B  $-\infty$        C 1       D -1       E 0

07 le nombre complexe  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{16}$  est égal à :

- A -1       B 1       C  $\frac{1}{2}$        D 2       E -2

08 Le domaine de définition de la fonction  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - (\ln(x))^2}}$  est:

- A  $] -\infty; e^2[$        B  $] e^2; +\infty[$        C  $] e^{-2}; e^2[$        D  $] 0; e^2[$        E  $\mathbb{R}^+$

09 Dans le plan orthonormé (unité de mesure est cm) On considère les graphes des deux fonctions  $f$  et  $g$  définies horizontales d'équations  $x = 2$  et  $x = 0$  est :

- A  $\frac{2+5\sqrt{2}}{-2} \text{ cm}^2$        B  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$        C  $\frac{2(5-2\sqrt{2})}{3} \text{ cm}^2$        D  $\frac{5}{2} \text{ cm}^2$        E  $\frac{2(2-5\sqrt{2})}{3} \text{ cm}^2$

10 On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \cos(e^x)$  et  $C$  le graphe de la fonction  $f$  dans le plan orthonormé. L'équation de la tangente au graphe de  $f$  au point 0 est:

- A  $y = \cos 1$        B  $y = -\sin 1$        C  $y = -\sin(1)x + \cos(1)$        D  $y = -\cos(1)x = \sin(1)$        E  $y = 1$

01 L'ensemble de solutions de l'équation  $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln(x + 11)$  dans  $\mathbb{R}$  :

- A  $\{1; -5\}$      B  $\{0; -2\}$      C  $\{1\}$      D  $\emptyset$      E  $\{-3; -11\}$

02  $(u_n)_n$  suite numérique définie par :  $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5}$  et  $u_1 = 1$ , donc la raison de la suite  $v_n = \frac{5}{u_n}$  :

- A  $-\frac{1}{3}$      B  $\frac{1}{3}$      C  $(v_n)_n$  n'est pas une suite arithmétique     D 3     E  $\frac{1}{2}$

03 Combien de nombres de trois chiffres pouvons-nous créer à partir des chiffres 6, 7, 8 et 9 ?

- A  $C_4^3$      B 9     C  $4^3$      D  $3^4$      E  $4 \times 3$

04 Pour  $x > -1$  la fonction primitive de  $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$  telle que  $f(0) = 0$  est :

- A  $\ln(x + 1) - \frac{2x}{1+x}$      B  $\frac{2x}{1+x}$      C  $\ln(x + 1) + \frac{x}{1+x}$      D  $\ln\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{2x}{x+1}$      E  $2 \ln(x + 1) - \frac{x}{x+1}$

05 On lance trois dés de couleurs différents à la fois. La probabilité d'obtenir trois nombres de somme égale à 5

- A  $\frac{5}{216}$      B  $\frac{5}{36}$      C  $\frac{1}{36216}$      D  $\frac{1}{9}$      E Autre réponse

06

- A  $8 + i8\sqrt{3}$      B  $-8 + i8\sqrt{3}$      C  $-8 - i8\sqrt{3}$      D  $8 - i8\sqrt{3}$      E  $4 + i4\sqrt{3}$

07 La courbe représentative de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2 - \ln(x)}{x-1}$  admet une asymptote oblique d'équation :

- A  $y = x - \frac{1}{2}$      B  $y = x + 1$      C  $y = x - 1$      D  $y = -x + 1$      E  $y = -x - 1$

08 Dans un repère orthonormé (cm)  
 Soient les représentations graphiques de deux fonctions  $f$  et  $g$  définie pour  $x > 0$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = x^2$$

L'aire délimitée par les deux courbes et les deux droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 2$  est :

- A  $\frac{2+5\sqrt{2}}{-2} \text{ cm}^2$      B  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$      C  $\frac{2(5-2\sqrt{2})}{3} \text{ cm}^2$      D  $\frac{5}{2} \text{ cm}^2$      E  $\frac{2(2-5\sqrt{2})}{3} \text{ cm}^2$

09 Ensemble de solutions de l'équation  $\frac{e^x - 3e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{3}{2}$  dans  $\mathbb{R}$  :

- A  $\emptyset$      B  $\mathbb{R}$      C  $\{1\}$      D  $\{2\}$      E  $\{1; 3\}$

10 La valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$

- A  $+\infty$      B 0     C  $\ln(2)$      D  $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$      E Autre réponse

**Q1 :** La valeur du nombre  $\ln(3)+4\ln(2)-\ln(60)$  est :

- A**  $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$       **B** 0      **C**  $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$       **D**  $\ln(15)$       **E**  $\ln\left(\frac{4}{5}\right)$

**Q2 :**  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite numérique définie par :  $u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}}$  et  $u_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$

Donc la raison de la suite géométrique  $(v_n)_{n \geq 1}$  définie par  $v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$  est :

- A**  $-\frac{1}{2}$       **B**  $\frac{1}{8}$       **C**  $(v_n)$  n'est pas une suite géométrique      **D**  $-\frac{1}{8}$       **E**  $\frac{1}{2}$

**Q3 :** L'ensemble de définition de la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+3x-4)}$  est :

- A**  $\left]-\infty; \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right]$       **B**  $\left[\frac{-3-\sqrt{29}}{2}; \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right[$       **C**  $\left]-\infty; \frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right[$   
**D**  $\left]-\infty; \frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right[ \cup \left[\frac{-3+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right[$       **E**  $\left[\frac{-3+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right[$

**Q4 :** La fonction primitive de la fonction  $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$  qui prend la valeur 0 au point 1 est :

- A**  $\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3}$       **B**  $\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}$       **C**  $\frac{\ln x}{4x^2} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}$       **D**  $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}$       **E**  $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4}$

**Q5 :** La valeur de  $\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-1} dx$  est :

- A**  $\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)$       **B**  $\frac{4}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$       **C**  $\frac{2}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{30}{\sqrt{5}+1}\right)$       **D**  $-\frac{2}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$       **E**  $\frac{2}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

**Q6 :** On considère deux urnes  $S_1$  et  $S_2$  chacune d'eux contient 5 boules numérotées de 1 à 5.

On tire au hasard et simultanément deux boules de  $S_1$  puis une boule de  $S_2$ .

La probabilité d'obtenir deux numéros impairs et un numéro pair est :

- A**  $\frac{3}{25}$       **B**  $\frac{12}{25}$       **C** 1      **D**  $\frac{3}{10}$       **E**  $\frac{18}{25}$

**Q7 :** La courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + \ln x}{x}$  admet au

voisinage de  $+\infty$  une asymptote d'équation :

- A**  $y = 2x - 3$       **B**  $y = -2x + 3$       **C**  $y = 2x$       **D**  $y = 2x + 3$       **E**  $y = -2x - 3$

**Q8 :** Trois élèves Mohamed, Ahmed et Amine ont passé un examen.

• La probabilité de réussite de Mohamed est  $\frac{3}{4}$ .

• La probabilité de réussite d'Ahmed est  $\frac{2}{3}$ .

• La probabilité de réussite d'Amine est  $\frac{1}{3}$ .

La probabilité pour que les trois élèves Mohamed, Ahmed et Amine réussissent est :

- A**  $\frac{1}{2}$       **B**  $\frac{1}{6}$       **C**  $\frac{2}{9}$       **D**  $\frac{1}{9}$       **E**  $\frac{1}{18}$

**Q9 :** Dans le plan rapporté à un repère orthonormé ( unité de mesure est le cm ), on considère

Les deux courbes représentatives  $(C_f)$  et  $(C_g)$  des deux fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 \quad (x > 0).$$

L'aire du domaine  $(\Delta)$  du plan délimité par  $(C_f)$ ,  $(C_g)$  et les droites d'équations

$x = 0$  et  $x = 2$  est :

**A**  $-\frac{1}{2} \text{cm}^2$

**B**  $\frac{1}{2} \text{cm}^2$

**C**  $\frac{3}{2} \text{cm}^2$

**D**  $\frac{5}{2} \text{cm}^2$

**E**  $\frac{2}{3} \text{cm}^2$

**Q10 :** Soit  $h$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Soit  $\Omega(1; 2)$  le centre de symétrie de  $(C)$ .

Donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a :

**A**  $h(x) = 2x$

**B**  $h(2-x) + h(x) = 4$

**C**  $h(2-x) = -h(x)$

**D**  $h(1-x) = -h(x) + 2$

**E**  $h(-x) = -h(x)$

الصفحة 1/2	مباراة ولوج كليات الطب و الصيدلة بأكادير برسم السنة الجامعية 2018 – 2019 21 يوليوز 2018 la Composante: MATHEMATIQUES الصيغة الفرنسية للاختبار
---------------	---

Une ou plusieurs propositions sont vraies, cocher les sur la grille

Soit le nombre complexe $z = -5 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ :	
01	arg(z) est congru à :

- A  $\frac{-\pi}{6} [2\pi]$      
 B  $\frac{\pi}{6} [2\pi]$      
 C  $\frac{5\pi}{6} [2\pi]$      
 D  $\frac{-5\pi}{6} [2\pi]$

02	La forme exponentielle de z est :
----	-----------------------------------

- A  $5e^{i\frac{5\pi}{6}}$      
 B  $5e^{i\frac{-5\pi}{6}}$      
 C  $-5e^{i\frac{\pi}{6}}$      
 D  $5e^{i\frac{7\pi}{6}}$

03	La forme trigonométrique de $\frac{1}{z}$ est :
----	---

- A  $\frac{1}{5} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$      
 B  $5 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$   
 C  $5 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$      
 D  $\frac{1}{5} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$

Soit la fonction numérique $f$ définie sur $]0 ; +\infty[$ par :	
$f(x) = (x + 1)e^{\frac{1}{x}}$ et $f(0) = 0$	
( $C_f$ ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.	
04	Sur $]0 ; +\infty[$ on a :

- A  $f'(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$      
 B  $f'(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$   
 C  $f'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$      
 D  $f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

05	
----	--

- A  $f$  est continue à droite en 0 .  
 B  $f$  est dérivable à droite en 0 .  
 C ( $C_f$ ) admet une asymptote oblique d'équation  $y = x + 2$  au voisinage de  $+\infty$  .  
 D ( $C_f$ ) admet une asymptote oblique d'équation  $y = x$  au voisinage de  $+\infty$  .

Soit la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$ par : $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$	
Et l'intégrale $I = \int_2^3 f(x) dx$	
06	Une primitive de $f$ sur $[2 ; 3]$ est $F$ telle que :

- A  $F(x) = \frac{1}{2(x^2-1)}$      
 B  $F(x) = \frac{-1}{2(x^2-1)}$   
 C  $F(x) = \frac{1}{2(x^2-1)} + 2$      
 D  $F(x) = \frac{-1}{2(x^2-1)} + 2$

07

$\boxed{\text{A}} \quad I = \frac{5}{48}$

$\boxed{\text{B}} \quad I = \frac{-5}{48}$

$\boxed{\text{C}} \quad I = \frac{15}{48}$

$\boxed{\text{D}} \quad I = \frac{-15}{48}$

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue trois tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne avant le tirage suivant ; si elle est blanche, on ne la remet pas. On considère les deux évènements suivants :

$E_1$ : « seule la 1<sup>er</sup> boule tirée est blanche »

$E_2$ : « seule la 2<sup>eme</sup> boule tirée est blanche »

08

$\boxed{\text{A}} \quad p(E_1) = \frac{5}{9}$

$\boxed{\text{B}} \quad p(E_1) = \frac{4}{9}$

$\boxed{\text{C}} \quad p(E_1) = \frac{5}{9} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\boxed{\text{D}} \quad \frac{5}{9} \times \frac{4}{9}$

09

$\boxed{\text{A}} \quad p(E_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{8}$

$\boxed{\text{B}} \quad p(E_2) = \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8}$

$\boxed{\text{C}} \quad p(E_2) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9}$

$\boxed{\text{D}} \quad p(E_2) = 3 \left(\frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8}\right)$

10

Sachant que l'on a obtenu une seule boule blanche à l'issue des 3 tirages, la probabilité que cette boule ait été tirée en premier est :

$\boxed{\text{A}} \quad \frac{64}{217}$

$\boxed{\text{B}} \quad \frac{81}{217}$

$\boxed{\text{C}} \quad \frac{9}{217}$

$\boxed{\text{D}} \quad \frac{36}{217}$

الصفحة 1/2	مباراة ولوج كليات الطب و الصيدلة بأكادير برسم السنة الجامعية 2018 – 2019 21 يوليوز 2018 Agadir الصيغة الفرنسية للاختبار MATHEMATIQUES la Composante:
---------------	--

**Note : Cocher ,sur la grille réservé aux réponses, l'unique bonne réponse parmi les quatre proposées (numérotées A,B,C,D) .**

**Exercice 1 :**

Soit la suite réelle  $u_n$  définie par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n$  appartenant à  $IN$  par :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$   
On pose :  $v_n = u_n - 3$  et  $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  pour tout  $n \in IN$

21)  $v_n$  une suite géométrique de raison :

- A  $\frac{1}{2}$        B  $\frac{3}{2}$        C  $\frac{2}{3}$        D  $-\frac{3}{2}$

22) Expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  :

- A  $2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$        B  $-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$        C  $\left(\frac{3}{2}\right)^n + n$        D  $-\left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

23) La valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \frac{1}{2}$  :

- A 2       B 6       C 8       D -3

**Exercice 2:**

Soient les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $0, +\infty$  par :

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) \text{ et } g(x) = \frac{-1}{x+1} + 2\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

24) La valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$  :

- A 0       B 1       C  $-\infty$        D  $+\infty$

25) Expression de  $f'(x)$  :

- A  $xg(x)$        B  $x^2g(x)$        C  $\frac{g(x)}{x^3}$        D  $\frac{g(x)}{x^4}$

25)  $\alpha$  un nombre réel appartenant à  $0, +\infty$  .Si  $g(\alpha) = 0$  alors  $f(\alpha)$  égale:

- A  $\frac{2}{\alpha(\alpha+1)}$        B  $\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$        C  $\frac{\alpha^2}{2(\alpha+1)}$        D  $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$

27) La valeur de l'intégrale  $\int_1^2 x^2 \ln x dx$  :

- A  $-\frac{3}{2} \ln 2 + \frac{3}{2}$        B  $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$        C  $-\frac{8}{3} \ln 2 + 2$        D  $\frac{3}{2} \ln 2 + \frac{7}{5}$

**Exercice 3:**

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

- L'urne  $U_1$  contient une boule blanche et une noire
- L'urne  $U_2$  contient 3 boules blanches et une noire

Les boules sont indiscernables au toucher

On choisit au hasard une urne et on tire au hasard une boule

28) La probabilité de tirer une boule blanche :

A  $\frac{3}{8}$        B  $\frac{1}{3}$        C  $\frac{3}{4}$        D  $\frac{5}{8}$

29) Sachant que la boule tirée est blanche, la probabilité qu'elle provienne de  $U_1$  :

A  $\frac{5}{8}$        B  $\frac{3}{8}$        C  $\frac{2}{5}$        D  $\frac{1}{5}$

30) Les boules dans  $U_1$  et  $U_2$  sont rassemblées dans une seule urne  $U_3$ .

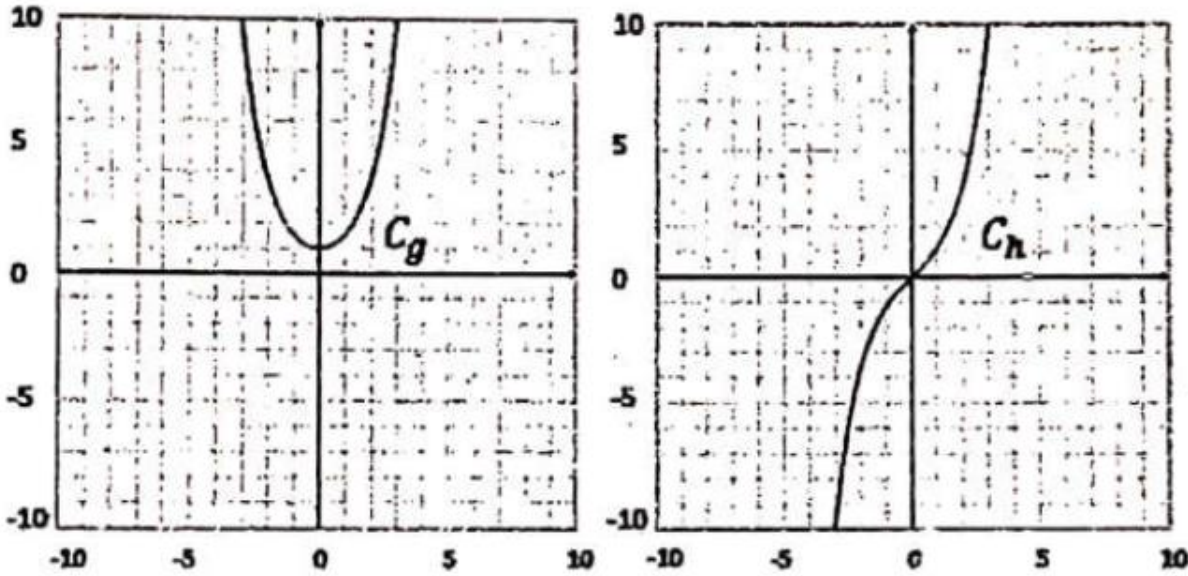
La probabilité de tirer au hasard et simultanément 2 boules de l'urne  $U_3$  de même couleur

A  $\frac{5}{12}$        B  $\frac{3}{15}$        C  $\frac{7}{15}$        D  $\frac{9}{12}$

**Exercice 1 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Les graphiques suivant ( $(C_g)$  et  $(C_h)$ ) donnent une partie de la représentation graphique des deux fonctions ( $g$  et  $h$ ), tel que :  $f = g + h$



**Q1 : Répondre par oui ou par non pour les propositions suivantes :**

[a]  $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 g(x)dx$

[b]  $f$  est une fonction paire

[c]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

**Q2 : Donner le signe de  $f'(x)$  pour tout  $x \in [0; +1]$**

**Exercice 2 :**

Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + x + 1} =$

**Exercice 3 :**

Calculer :  $\int_0^2 (2x - 2)e^{x^2 - 2x + 1} dx =$

**Exercice 4 :**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les vecteurs

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + 3\vec{k}$  et  $\vec{v} = \frac{20}{3}\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}$

Déterminer les valeurs des nombres réels  $a$  et  $b$  pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient orthogonaux

$a =$    $b =$

**Exercice 5 :**

Une urne contient 4 boules vertes, 3 boules rouges, 2 boules noires et une boule blanche. Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire 4 boules de l'urne en même temps.

**01/2pts** Le domaine de définition de la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \sqrt[3]{-x^2}$

- A  $-\infty; 0$      B  $-\infty; 0$      C  $\emptyset$      D  $0$      E  $0; +\infty$

**02/2pts** Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ , la valeur de l'intégrale  $\int_0^x \frac{t}{t+1} dt$  est :

- A  $x - \ln(1+x)$      B  $x$      C  $0$      D  $\ln(1+x) - x$      E  $2x - \ln(1+x)$

**03 /2pts** Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\ln^{(n)}$  : la dérivée  $n^{ième}$  de la fonction  $\ln$  sur  $]0; +\infty[$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

- A  $\ln^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}$      B  $\ln^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n)!}{x^n}$      C  $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n)!}{x^n}$      D  $\ln^{(n)}(x) = (\ln x)^n$      E  $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

**04/2pts** La limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  est égal à :

- A  $-\infty$      B  $0$      C  $1$      D  $-1$      E  $+\infty$

**05/2pts** La limite  $l$  de la fonction  $x \rightarrow \int_0^x (t^2 + 2t - 1)e^{-t} dt$  est égal à :

- A  $l = +\infty$      B  $l = 1$      C  $l = 4e + 1$      D  $l = -\infty$      E n'existe pas

**06/2pts** Le textet suivant ( $x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$ ) est une :

- A proposition vraie     B proposition fausse     C proposition positive  
 D fonction propositionnelle     E loi logique

**07/2pts** Dans l'espace  $(\xi)$  rapporte a un repère orthonormé  $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .  
L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que  $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2018 = 0 \end{cases}$ .

- A un cercle     B un plan     C une droite passant par le point  $O(0; 0; 0)$   
 D la sphère de centre  $O$  et de rayon 2018     E la sphère de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{2018}$

**08/0,75pts** On considère la suite définie par :  $u_0 = 1,0001$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = (u_n)^{2018}$ .  
La limite de la suite  $(u_n)$  est égale à :

- A n'existe pas     B  $-\infty$      C  $0$      D  $1$      E  $+\infty$

<b>09/ 0,75pts</b>	<b>Pour tout réel non nul <math>x</math> ; on considère dans le plan complexe ; les points <math>A( x )</math> ; <math>B( x e^{2x})</math> ; <math>C( x e^{-2x})</math> ; <math>D(- x e^{-2x})</math> :</b>
------------------------	---

- A**  $A; B; C; D$  sont alignés    
 **B**  $ABCD$  est un parallélogramme    
 **C**  $A; B; C; D$  sont cocycliques  
 **D**  $(AB) \parallel (CD)$     
 **E**  $AB = CD$

<b>10/ 0,75pts</b>	<b>La probabilité qu'un candidat obtienne la note 0,25 dans cette épreuve de mathématique sachant qu'il choisit l'une des cinq réponses possibles dans chacune des seize questions est :</b>
------------------------	--

- A**  $\frac{1}{80}$     
 **B** 0    
 **C** 1    
 **D**  $\frac{4^{16}}{5^{16}}$     
 **E**  $\frac{C_5^4}{80}$

<b>11/ 0,75pts</b>	<b>La limite de la suite <math>u_n = 1,9999\dots 999</math> ; ou 9 est écrit <math>(n+1)</math> fois est égale à :</b>
------------------------	--

- A** 9    
 **B**  $+\infty$     
 **C** 3    
 **D** 2    
 **E** 1,99

<b>12/ 0,75pts</b>	<b>La valeur de l'intégrale <math>\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx</math> est égale à :</b>
------------------------	--

- A**  $\pi$     
 **B**  $2\pi$     
 **C** 0    
 **D**  $\pi\sqrt{2}$     
 **E**  $2\sqrt{2}$

<b>13/ 0,75pts</b>	<b>L'équation <math>x^{2019} + x - 2019 = 0</math> ; d'inconnue <math>x</math> :</b>
------------------------	--

- A** admet une seule solution dans  $\mathbb{C}$     
 **B** admet 2019 solutions dans  $\mathbb{R}$   
 **C** admet une seule solution dans  $\mathbb{N}$     
 **D** admet une seule solution dans  $\mathbb{Z}$   
 **E** admet une seule solution dans  $\mathbb{R}$

<b>14/ 0,5pts</b>	<b>Pour tout entier naturel non nul <math>n</math> , l'équation <math>A_n^k = k!</math> d'inconnue <math>k</math> dans <math>\mathbb{N}</math> :</b>
-----------------------	--

- A** n'admet pas de solution    
 **B** admet la seule solution  $n$     
 **C** admet exactement deux solutions  
 **D** admet une infinité de solutions    
 **E** admet  $n+1$  solutions

<b>15/ 0,5pts</b>	<b>Soient <math>P</math> et <math>Q</math> deux propositions telles que <math>P</math> est fausse. Si l'implication <math>P \Rightarrow Q</math> est vraie . alors :</b>
-----------------------	--

- A**  $Q$  est à la fois vraie et fausse    
 **B**  $Q$  est soit vraie soit fausse    
 **C**  $Q$  est nécessairement fausse  
 **D**  $Q$  est nécessairement vraie    
 **E**  $P$  est vraie

<b>16/ 0,5pts</b>	<b>Dans le plan complexe rapporté au repère <math>(o; \vec{u}; \vec{v})</math> ; l'ensemble des points <math>M(z)</math> tels que <math>\arg(z) \equiv 0[\pi]</math> est :</b>
-----------------------	--

- A** l'axe des imaginaires    
 **B** l'axe des réels    
 **C** le plan complexe  
 **D** l'axe des réels privé du point 0    
 **E** une demi droite d'origine 0

الصفحة 1/2	مباراة ولوج كليات الطب و الصيدلة و كليتي طب الاسنان برسم السنة الجامعية 2018 - 2019 - يوليوز 2019 الصيغة الفرنسية للاختبار la Composante: MATHEMATIQUES
Ex01	Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère les points d'affixes respectives : $z_A = -1$ ; $z_B = -2 + i\sqrt{3}$ ; $z_C = -z_B$ ; $z_D = \frac{z_B-1}{z_B+1}$ et $z_E = 1$

Q1: [A]  $z_B + 1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  [B]  $z_B + 1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$  [C]  $z_B + 1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$  [D]  $z_B + 1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

Q2: [A]  $z_D = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$  [B]  $3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  [C]  $\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$  [D]  $3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Q3: [A]  $\frac{z_C - z_D}{z_C - z_E} = \frac{1}{2}$  [B]  $\frac{z_C - z_D}{z_C - z_E} = -\frac{1}{2}$  [C]  $\frac{z_C - z_D}{z_C - z_E} = \frac{i}{2}$  [D]

les points C, D et E sont alignés

Ex 02	Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ . On pose $v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}$
----------	--

Q4: [A]  $\forall n \geq 0; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$  [B]  $\forall n \geq 0; v_{n+1} = 1 + v_n$  [C]  $\forall n \geq 0; v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  [D]  $\forall n \geq 0; v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Q5: [A]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$  [B]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  [C]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$  [D]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Ex 03	On considère la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$
----------	--

Q6: [A]  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  [B]  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  [C]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  [D]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Q7: [A]  $f'(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$  [B]  $f'(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$  [C]  $f'(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$  [D]  $f'(x) = \frac{\ln x(2 - x \ln x)}{x^2}$

Q8: [A]  $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{5}{6}$  [B]  $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{1}{3}$  [C]  $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = 1$  [D]  $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = e$

Ex 04	On lance un dé trois fois successive. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où il apparaisse le nombre 6. Soit n et p les paramètres de la loi binomiale X
----------	---

Q9: [A]  $n = 3$  et  $p = \frac{1}{2}$  [B]  $n = 6$  et  $p = \frac{1}{2}$  [C]  $n = 3$  et  $p = \frac{1}{3}$  [D]  $n = 3$  et  $p = \frac{1}{6}$

Q10: [A]  $P(X = 2) = \frac{3}{8}$  [B]  $P(X = 2) = \frac{5}{72}$  [C]  $P(X = 3) = \frac{5}{24}$  [D]  $P(X = 3) = \frac{1}{216}$

**Exercice 1 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

On pose  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$  et  $w_n = \ln(v_n)$

**Q1 :**

- A  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1$      B  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 2$      C  $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = w_n + 2$      D  $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = 2w_n$

**Q2 :**

- A  $w_n = \ln(2) \times (2)^n$      B  $w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^{n+1}$      C  $w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^n$      D  $w_n = -\ln(2) \times (2)^n$

**Q3 :**

- A  $v_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$      B  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$      C  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$      D  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**Q4 :**

- A  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$      B  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$      C  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$      D  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$

**Exercice 2 :**

Soient  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation :  $z^2 + 4z + 16 = 0$  dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  tel que  $\text{Im}(z_1) > 0$ .

**Q5 :**

- A  $z_1 = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$   
 $z_2 = 4e^{-\frac{2i\pi}{3}}$      B  $z_1 = 4e^{\frac{i\pi}{3}}$   
 $z_2 = 4e^{-\frac{i\pi}{3}}$      C  $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$   
 $z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$      D  $z_1 = -2 + 2i\sqrt{3}$   
 $z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$

**Q6 :**

- A  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \pi [2\pi]$      B  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$      C  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = 1$      D  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = 4$

**Exercice 3 :**

On considère une expérience aléatoire ayant 4 issues possibles notées  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  et  $\omega_4$  de probabilités respectives  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$ . On suppose que  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  constituent dans cet ordre les termes d'une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{9}$ .

**Q7 :**

- A  $p_4 = \frac{5}{12}$      B  $p_3 = \frac{1}{6}$      C  $p_2 = \frac{1}{3}$      D  $p_1 = \frac{1}{12}$

**Exercice 4 :**

Soit  $g$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$g(x) = x - \frac{\ln x}{x^2} \text{ et soit } (C_g) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

et  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x$ .

**Q8 :**

**A**  $\forall x \in [1, +\infty[ \quad g'(x) \geq 0$

**B**  $\forall x \in [1, +\infty[ \quad g'(x) \leq 0$

**C**  $\forall x \in ]0, 1] \quad g'(x) \leq 0$

**D**  $\forall x \in ]0, 1] \quad g'(x) \geq 0$

**Q9 :**

**A**  $(\Delta)$  coupe  $(C_g)$  au point d'abscisse 1

**B**  $\forall x \in [1, +\infty[ \quad g(x) \geq x$

**C**  $\forall x \in ]0, 1] \quad g(x) \leq x$

**D**  $(\Delta)$  est une asymptote oblique à  $(C_g)$

**Q10 :**

**A**  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{\ln 2 - 3}{2}$

**B**  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{-3 - \ln 2}{2}$

**C**  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{\ln 2 - 1}{2}$

**D**  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1 - \ln 2}{2}$

**Q1** Le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  est :

- A  $] - 1; 1[$      
  B  $] - \infty; -1] \cup ]1; +\infty[$      
  C  $] - \infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$      
  D  $] - \infty; -1[$   
 E  $] - \infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

**Q2**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1}$  est égal à :

- A  $-\infty$      
  B  $-1$      
  C  $0$      
  D  $1$      
  E  $+\infty$

**Q3** La fonction dérivée de la fonction  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \cos(2x) + \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$  est égal à :

- A  $f'(x) = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \cos(2x) + 2 \sin(2x)\right) - \frac{1}{1+x}$   
 B  $f'(x) = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \cos(2x) - 2 \sin(2x)\right) - \frac{1}{1+x}$   
 C  $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \cos(2x) + 2 \sin(2x)\right) - \frac{1}{1+x}$   
 D  $f'(x) = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \cos(2x) + 2 \sin(2x)\right) + \frac{1}{1+x}$   
 E  $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \cos(2x) + 2 \sin(2x)\right) + \frac{1}{1+x}$

**Q4**  $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$  est égal à :

- A  $1$      
  B  $-1$      
  C  $0$      
  D  $-\frac{1}{3}$      
  E  $\frac{1}{3}$

**Q5**  $\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx$  est égal à :

- A  $-e^\pi - 1$      
  B  $e^\pi + 1$      
  C  $1 - e^\pi$      
  D  $-\frac{e^\pi + 1}{2}$      
  E  $\frac{e^\pi + 1}{2}$

**Q6** Soit le nombre complexes  $z = 1 - i\sqrt{3}$ , alors un argument de  $\bar{z}$  est égal à :

- A  $\frac{\pi}{3} [2\pi]$      
  B  $-\frac{\pi}{3} [2\pi]$      
  C  $\frac{\pi}{6} [2\pi]$      
  D  $-\frac{\pi}{6} [2\pi]$      
  E  $\frac{2\pi}{3} [2\pi]$

**Q7** Quel est le nombre des mots de sept lettres qui ont un sens ou non qui peuvent être écrits en utilisant toutes les lettres de « docteur » :

- A  $6$      
  B  $120$      
  C  $216$      
  D  $342$      
  E  $5040$

**Q8** Soit  $V_n = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{n-1}}$  tel que  $x \neq 1, x \neq 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  est égal à :

- A  $V_n = \frac{n(n+1)}{2}$      
  B  $V_n = \frac{x^n - 1}{x^n - x^{n-1}}$      
  C  $V_n = \frac{x^n - x^{n-1}}{x^n - 1}$   
 D  $V_n = 1 - x^n$      
  E  $V_n = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n$

**Q9** L'ensemble de solutions de l'inéquation  $\ln(x - 1) + \ln(x - 3) < \ln 2$  est :

**A** ]3; +∞[

**B** ]-∞; -3[ ∪ ]2 + √3; +∞[

**C** ]2 + √3; +∞[

**D** ]3; 2 + √3[

**E** ]-3; 2 + √3[

**Q10**  $g(x)$  est la solution de l'équation différentielle  $2y' + y = 0$  avec  $g(0) = -\frac{1}{2}$ :

**A**  $g(x) = \frac{-1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

**B**  $g(x) = \frac{-1}{2} \cos(x)$

**C**  $g(x) = \frac{-1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$

**D**  $g(x) = \frac{-1}{2} (1 - \sin(x))$

**E**  $g(x) = \frac{1}{2} (e^{-\frac{x}{2}} - 2)$ .