Concours blancs d'accès à la faculté ENSA-ENSAM	Fiche 08 (ENSA-ENSAM) Analyse (SM)	Prof : FAYSSAL Page : 01

Fonction arctangente

La fonction $x \to \tan x$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. La fonction réciproque est appelé arctangente , notée arctan

Propriétés :

1) $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right);(\forall y \in \mathbb{R})$

$\tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan y$

2) $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right): \arctan(\tan x) = x$

$(\forall x \in \mathbb{R}): \tan(\arctan x) = x$

$(\forall x \in \mathbb{R}): \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\forall x \in \mathbb{R}): \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3) $(\forall x; y \in \mathbb{R}): \ artan\, x = artan\, y \Leftrightarrow x = y$

La fonction arctan est impaire

4) $\forall x \in]0;+\infty[: 0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$

$\forall x \in]-\infty;0[: -\frac{\pi}{2} < \arctan x < 0$

5) $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

$(\forall x \in]-\infty;0[)$; $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

6) Soient $a; b \in \mathbb{R}$

$\arctan a + \arctan b = \arctan(\frac{a+b}{1-ab})$

$\arctan a - \arctan b = \arctan(\frac{a-b}{1+ab})$

Valeurs importantes :

x	0	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\pm(\sqrt{2}-1)$
$\arctan(x)$	0	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{8}$

Limites :

$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$

Fonction dérivée :

$(\forall x \in \mathbb{R}) : (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\forall x \in I) : (\arctan U(x))' = \frac{U(x)'}{1+U^2(x)}$

Intégration par changement de variable

$$\int_a^b f(g(x)).\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

On pose $t = g(x)$ *donc* $dt = g'(x)dx$

Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$

$F(x) = \int_0^x f(t) \Rightarrow (\forall x \in I); F'(x) = f(x)$

f est paire $\Rightarrow$ F est impaire

f est impaire $\Rightarrow$ F est paire

Dérivation de la fonction $\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\, dt$

On pose : $F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\, dt$

$F'(x) = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$

Somme de RIEMANN

On pose : $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$

et $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$, alors les suites (S_n) et (s_n) sont convergentes et on a : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)\, dx$

Intégrales de WALIS ; $n \in \mathbb{N}$

$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dt$

$U_0 = \frac{\pi}{2}$; $U_1 = 1$ *et* $U_2 = \frac{\pi}{4}$

$U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$ et $U_n U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$

$U_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ *et* $U_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, U_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Théorème de ROLLE :

Si f est continue sur $[a;b]$ est dérivable sur $]a;b[$ et $f(a) = f(b)$

alors ; $(\exists c \in]a;b[): f'(c) = 0$

Théorème d'accroissement fini

$$\begin{cases} f \text{ une fonction continue sur } [a;b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a;b[\end{cases} \Rightarrow$$

$(\exists c \in]a;b[): f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)$

Inégalité d'accroissement fini

Si $(\forall x \in I): |f'(x)| \leq k$ alors

$(\forall x; y \in I): |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Symboles : $\sum$ et $\prod$

$n \in \mathbb{N}$ et $a_0; a_1; a_2 \dots a_n$ des nombres réels

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \dots . \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=n}^{m} k = \frac{(m-n+1)(n+m)}{2}$
- $\sum_{k=0}^{n} (ak+b) = \frac{(n+1)(na+2b)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=n}^{m} q^k = \frac{q^n - q^{m+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{(1-q)^2}$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
- $\sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} min(i;j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{0\le x\le n} E(x) = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k} = (a+b)^n \quad ; \quad (BN)$
- $\sum_{k=1}^{n} C_n^k\, a^k = (a+1)^n$
- $\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n$
- $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$
- $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = ln(2)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Changement d'indice :

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p+m}^{k=n+m} a_{k-m}$$

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p-m}^{k=n-m} a_{k+m}$$

Exemple 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{p^2-1} = ?$$

Astuce : $\frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}$

$$w_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2-1}$$

$$= \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{n+1} \frac{1}{p}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} - \sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{3}{4}$

Exemple2 :

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{12} C_n^{12}\right) - 34 = \frac{1}{2} \times (2^{12}) - 34 = 2^{11} - 34 = 2048 - 34 = 2014$$

Exemple3 :

$$S = \sum_{k=1}^{35} k^2 = \frac{35\times(35+1)(2(35)+1)}{6} = \frac{35\times36\times71}{6} = 14910$$

Exemple 4 :

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

Arithmétique

Soit a ; b et c des entiers relatifs non nuls.

- $a/b \Rightarrow b = ka$; $k \in \mathbb{Z}$
- Si a divise b et b divise c alors a divise c.
- Si c divise a et b alors c divise $ma + nb$ où m et n sont deux entiers relatifs.

Nombre premier

- Un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.
- Tout entier naturel n strictement supérieur à 1 se décompose en produit de facteurs premiers.

$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$ avec $p_1, p_2, \ldots, p_r$ nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ entiers naturels non nuls.

- Le nombre des diviseurs positifs de n est :

$$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \ldots \times (\alpha_r + 1)$$

Congruence -Fermat

- Deux entiers a et b sont congrus modulo n lorsque $a - b$ est divisible par n. On note $a \equiv b[n]$.
- $a \equiv a[n]$ pour tout entier relatif a.
- Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$
- Si $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a :
- $a + a' \equiv b + b'[n]$; $a - a' \equiv b - b'[n]$
- $a \times a' \equiv b \times b'[n]$; $a^p \equiv b^p[n]$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Fermat: $a \wedge b = 1$ et p premier $\Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$

PGCD – Gauss- Bézout:

- Si b divise a alors $PGCD(a\,;\,b) = b$
- $PGCD(ka\,;kb) = k \times PGCD(a\,;b)$

$d = a \wedge b$ ssi $\exists(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$

- Si $a \wedge b = 1$ *et* $a \wedge c = 1$ *alors* $a \wedge bc = 1$
- $\forall(n;m) \in \mathbb{N}^{*2}$: $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^m = 1$
- Gauss : $a \wedge b = 1$ et a/bc alors a/c
- Si a/c et b/c et si $a \wedge b = 1$ alors ab/c

Bézout: $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (\exists u\,;v \in \mathbb{Z})\ au + bv = 1$

- L'équation (E): $ax + by = c$ posède des solutions $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ ssi $a \wedge b/c$

Matrices

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{21} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times x + c \times y & a \times z + c \times t \\ b \times x + d \times y & b \times z + d \times t \end{pmatrix}$$

$$k\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = ad - cb$$

$$det(A) = \alpha \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} = 2^n.M$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ;\ n \in \mathbb{N}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M \ ;\ n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M\ ;\ n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} = M$$

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ \boxed{6 \quad 4 \quad 1} \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+0+15 & 40+30+9 & 10+45+24 \\ 6+0+5 & 24+24+3 & 12+36+8 \\ 9+0+35 & 36+0+21 & 18+0+56 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = 3^{n-1}M \ ;\ n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = a^n.3^{n-1}M \ ;\ n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = a^n\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $det(A) = 0 \Rightarrow A^{-1}$ *n'existe pas*
- $A \neq O$; $B \neq O$ et $A \times B = O \Rightarrow M^n = O \Rightarrow A^{-1}$ *n'existe pas;* B^{-1} *n'existe pas*

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1

Sachant que $11 \times 11 = 121$, le produit $111111111 \times 1111111111$ est égale à			
A	B	C	D
1234567654321	123456787654321	12345678987654321	1234568654321

Q2

Le nombre de diviseur positifs du nombre $N = 546 \times 840$ est :			
A	B	C	D
180	181	182	183

Q3

f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. La négation de la proposition" f est la fonction nulle" est :			
A	B	C	D
$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$	$\exists x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$

Q4

La solution de l'équation à variable réelle x : $ln(x^2 - 1) - ln(2x - 1) + ln\,2 = 0$ *est* :			
A	B	C	D
$\frac{1+7\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

Q5

La valeurs maximale des termes $u_k = C_{22}^k\, 20^{22-k}\, 21^k$ dans le développement du nombre $(20+21)^{22}$ par la formule de Binôme de Newton est atteinte pour k égale à :			
A	B	C	D
8	9	10	11

Epreuve de Maths 2022/2023	Concours d'accès à L'ENSA 2022	Prof : FAYSSAL Page : 02

Q6

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} =$			
A	B	C	D
1	0	$+\infty$	e

Q07

$\lim\limits_{n \to +\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)} =$			
A	B	C	D
0	-6	6	$+\infty$

Q08

Soient a et b deux réels la fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+x)-x}{x^2} & si\ x > 0 \\ ax + b & si\ x \leq 0 \end{cases}$, soit continue en 0 ssi :			
A	B	C	D
$a \in \mathbb{R}\ et\ b = 2$	$a = 0\ et\ b = 1$	$a = -\frac{1}{2}\ et\ b = \frac{1}{2}$	$a \in \mathbb{R}\ et\ b = -\frac{1}{2}$

Q09

Soit f la fonction définit par : $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\ \sqrt{(x+3)^3}}$, la dérivée de f est :			
A	B	C	D
$\frac{5x^2 - x - 12}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2 + x - 24}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2 + x - 24}{2\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$-\frac{3x^2 + x - 24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

Q10

f une fonction de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$ définit par $f(x) = xe^x$. l'équation de la tangente à la courbe f^{-1} au point d'abscisses e est			
A	B	C	D
$y = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2e}x + 1$	$y = \frac{1}{2e}x - 1$

Q11

La valeur de $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}dx$ est :

A	B	C	D
$\frac{\pi}{2}+1$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\frac{\pi}{4}-1$	$\frac{\pi}{4}+1$

Q12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx$ la valeur de la valeur de I_4 est :

A	B	C	D
$\frac{252}{315}$	$\frac{254}{315}$	$\frac{258}{315}$	$\frac{256}{315}$

Q13

$\cos\frac{\pi}{16}$ est égale à :

A	B	C	D
$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Q14

La forme algébrique du nombre $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$ est :

A	B	C	D
$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Q15

Soit le nombre complexe $z=\sqrt{3}+i$ alors z^5 est égale à :

A	B	C	D
$\bar{z}$	$-8\bar{z}$	$-16\bar{z}$	$16\bar{z}$

Q16

Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation suivante :

$$2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0 \;\; avec\; m\in\mathbb{C}^*;\;\; z\in\mathbb{C} \;\; ; m\neq 1\; et\; m\neq i$$

Alors $Im(z_1)\times Im(z_2)=$

A	B	C	D
$\frac{1-m^2}{2}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{4}$

Q17

La solution $y(x)$ de de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0 \ , y(0) = -4 \ \ et \ y'(0) = 6$$

A	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{3}{8}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
B	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{8}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
C	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
D	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$

Q18

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève. La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D
$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$

Q19

On garde les mêmes données de la question Q17. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon , la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A	B	C	D
$0,25$	$0,35$	$0,45$	$0,55$

Q20

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation cartésienne (P): $2x - y - 2z + 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation (S): $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$. Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :

A	B	C	D
$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

I. Calcul de limites

① Régle de l'hospital (R.H)

si f et g sont dérivables en x_0

et $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x_0)}$: F.I

alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemples

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{0} \frac{e^x - 1}{2x}$
$= \lim_{0} \left(\frac{e^x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

3. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x - 2}$
$= \lim_{-1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 3}$
$= \lim_{-1} \frac{6x + 2}{6x} = \frac{2}{3}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{0} \left(\frac{\cos x - 1}{3x^2}\right)$
$= \lim_{0} \left(\frac{-\sin x}{6x}\right)$
$= \lim_{0} \left(-\frac{\cos x}{6}\right) = -\frac{1}{6}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x}$
$= \lim_{0} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}$
$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

6. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 3h)}{5h}$
$= \lim_{h\to 0} \frac{-2f'(x_0 - 2h) - 3f'(x_0 + 3h)}{5}$
$= \frac{-2f'(x_0) - 3f'(x_0)}{5} = -f'(x_0)$

A retenir

$$\boxed{(g\circ f)' = f' \times g'(f)}$$

Exemples

① $f(x) = \sin(ax+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$
$f'(x) = a.\cos(ax+b)$

② $f(x) = \cos(ax+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$
$f'(x) = -a.\sin(ax+b)$

③ $f(x) = \tan(ax+b)$
$f'(x) = a(1 + \tan^2(ax+b))$
$= \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

9 Limites de fcts irrationnelles

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} \pm m.x \quad (F.I)$$

A) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - mx$

si $\sqrt{a} \neq m$

$$\lim_{+\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - mx = +\infty(\sqrt{a} - m)$$

Exemples

① $\lim_{+\infty} \sqrt{4x^2-5x+1} - 3x = +\infty(\sqrt{4}-3) = -\infty$

② $\lim_{+\infty} \sqrt{5x^2+3} - 2x = +\infty(\sqrt{5}-2) = +\infty$

Conclusion

① si $\sqrt{a} > m$

$$\lim_{+\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - mx = +\infty$$

② si $\sqrt{a} < m$

$$\lim_{+\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - mx = -\infty$$

B) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - m.x \quad (F.I)$

si $\sqrt{a} = m$

$$\lim_{+\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - mx = \frac{b}{\sqrt{a}+m} = \frac{b}{2m}$$

Exemples

① $\lim_{+\infty} \sqrt{x^2-x+1} - x = \frac{-1}{2}$

② $\lim \sqrt{4x^2+5x-1} - 2x = \frac{5}{4}$

③ $\lim_{+\infty} \sqrt{ax^3+bx^2+c} - \sqrt{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}$ est finie $(\in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow a = \alpha$ et $b = \beta$

exp $\lim_{+\infty} \sqrt{x^3+2x^2+3} - ax\sqrt{x+b}$ est finie $\Longleftrightarrow a = 1$ et $b = 2$

④ $\lim_{+\infty} \sqrt{25x^2-1} - 5x = \frac{0}{10} = 0$

⑤ $\lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - mx =$

$$\begin{cases} +\infty & \text{si } m < 1 \\ -\infty & \text{si } m > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } m = 1 \end{cases}$$

C) $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} + mx$

si $\sqrt{a} \neq m$

$\lim\limits_{-\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} + mx$

$= -\infty(-\sqrt{a}+m)$

Exemples

① $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{5x^2-2x+1} + 2x$

$= -\infty(-\sqrt{5}+2) = +\infty$

② $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{7x^2-x+1} + 3x$

$= -\infty(-\sqrt{7}+3) = -\infty$

Conclusion

① si $-\sqrt{a}+m > 0$

$\lim\limits_{-\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} + mx = -\infty$

② si $-\sqrt{a}+m < 0$

$\lim\limits_{-\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} + mx = +\infty$

D) $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} + mx$

$= \dfrac{b}{-\sqrt{a}-m}$ si $\sqrt{a} = m$

$= -\dfrac{b}{2m}$

Exemples

① $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x = \dfrac{1}{-2}$

② $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{9x^2-7x+1} + 3x = \dfrac{-7}{-\sqrt{9}-3}$

$= \dfrac{7}{6}$

③ $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{25x^2-1} + 5x = 0$

E) 1) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1} = \dfrac{5}{2(3)} = \dfrac{5}{6}$

2) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{-7x+18}-2}{x-2} = \dfrac{-7}{2(2)} = -\dfrac{7}{4}$

3) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{x+11}-4}{x-5} = \dfrac{1}{2(4)} = \dfrac{1}{8}$

4) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1} = \dfrac{1}{3(2^2)} = \dfrac{1}{12}$

5) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt[3]{5x+17}-3}{x-2} = \dfrac{5}{3(3^2)} = \dfrac{5}{27}$

6) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[4]{3x+10}-2}{x-2} = \dfrac{3}{4(2^3)} = \dfrac{3}{32}$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{-2x+83}-3}{x-1} = \dfrac{-2}{4(3^3)}$

Généralisation du cas (E)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[n]{\alpha x+\beta}-b}{x-x_0} \quad \text{(F.I)}$$

$$= \frac{\alpha}{n\,(b^{n-1})}$$

9) Les équivalences et le calcul de limites

(Développement limité)

Définition

on dira que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 ssi :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

et on écrit

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$$

Exemples de fcts équivalentes

1. $\sin x \underset{0}{\sim} x$
2. $1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
3. $\tan x \underset{0}{\sim} x$
4. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
5. $e^x \underset{0}{\sim} 1+x$
6. $\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1+\dfrac{x}{2}$
7. $(1+x)^n \underset{0}{\sim} 1+n.x$

Exemples de limites

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n.\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n-2}}\right)$

$= \lim\limits_{+\infty}\left(\dfrac{n}{2}\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)\right)$

$= \lim\limits_{+\infty}\left(\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{2}{n-1}\right)\right) = 1$

2. $\lim\limits_{+\infty}\left(x.\ln\sqrt[n]{1+\dfrac{a}{x}}\right) = \dfrac{a}{n}$

3. $\lim\limits_{+\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a.$

A retenir

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha n+a}{\alpha n+b}\right)^{\beta n} = e^{\beta\left(\frac{a-b}{\alpha}\right)}$$

③ Développements limités usuels

ⓐ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2$

ⓑ $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$.

ⓒ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$

ⓓ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$

ⓔ $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3}$

ⓕ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2$

ⓖ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$

ⓘ $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2}$

ⓙ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$

Exemples

① $\lim\limits_{0} \left(\frac{(1-e^{2x}) \cdot \sin x}{x^4 + 5x^2} \right)$

$= \lim\limits_{0} -\left(\frac{2x \cdot x}{5x^2} \right) = -\frac{2}{5}$

② $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x/2} = 1$

③ $\lim\limits_{0} \frac{(e^x-1) \cdot \tan x}{x - x \cdot \cos x} = 2$

II. Suites numériques.

① Suite de la forme $U_{n+1} = aU_n + b$

Soit $\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = aU_n + b \\ V_n = U_n - l \end{cases}$

avec l est point fixe de la fonction $f(x) = ax + b$

(c-à-d $f(l) = l$) $\left(l = \frac{b}{1-a} \right)$

→ (V_n) géometrique de raison a

→ $\lim\limits_{+\infty} (V_n) = 0$ si $-1 < a < 1$

→ $\lim\limits_{+\infty} (U_n) = l$

→ si $U_0 < l \Rightarrow (U_n)$ est ↗

→ si $U_0 > l \Rightarrow (U_n)$ est ↘

exple $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \frac{10}{11} U_n + \frac{12}{11} \\ V_n = U_n - 12 \end{cases}$

→ (V_n) géometrique de raison $\frac{10}{11}$

→ $\lim\limits_{+\infty} (V_n) = 0$

→ $\lim (U_n) = 12$

→ (U_n) est croissante, car $U_0 < 12$

② Suite de la forme $U_{n+1} = \frac{aU_n+b}{cU_n+d}$

Soit $\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = \frac{aU_n+b}{cU_n+d} \\ V_n = \frac{U_n - l_1}{U_n - l_2} \end{cases}$

avec l_1 et l_2 sont les points fixes de $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

→ $\forall n \in \mathbb{N} \quad l_1 < U_n < l_2$

→ (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{V_1}{V_0}$

→ $\lim\limits_{+\infty} (V_n) = 0$ si $-1 < q < 1$

→ si (U_n) est $\nearrow \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = l_2$

→ si (U_n) est $\searrow \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = l_1$

Exple

$U_0 = 3$

$U_{n+1} = \frac{8U_n - 8}{U_n + 2}, \quad V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 2}$

→ $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 < U_n < 4$

→ (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{V_1}{V_0} = \frac{2}{3}$

→ $\lim\limits_{+\infty} (V_n) = 0$

→ $\lim\limits_{+\infty} (U_n) = 2$ car $U_1 > U_0$

③ Suite de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$

avec f non affine et non homographique.

→ si (U_n) est convergente alors $l = \lim\limits_{+\infty} U_n$ est point fixe de la fonction f.

→ si f admet deux points fixes, la limite de la suite (U_n) dépend de sa monotonie.

Exple

Soit $w_0 = \frac{1}{2}$, $w_{n+1} = (w_n - 1)^2 + 1$

si (w_n) est convergente alors $\lim\limits_{+\infty} w_n = l$ vérifie $f(l) = l$

avec $f(x) = (x-1)^2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad l = 1$ ou $l = 2$

et comme $w_{n+1} - w_n = (w_n - 1)(w_n - 2)$

et $1 < w_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc $w_{n+1} < w_n$

d'où $\lim\limits_{+\infty} w_n = 1$

Attention $w_0 < w_1$, mais $w_1 > w_2$ ($w_0 \notin]1, 2[$)

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

④ Limite d'une somme.

ⓐ $S_n = \sum_{k=p}^{n} V_k$, avec (V_k) suite géométrique de raison q / $-1<q<1$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{V_p}{1-q}$$

exp :

① $\lim_{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

② $\lim_{+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

③ $\lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{5^k} = -\frac{-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{1}{6}$

④ $\lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{k-1}}{\pi^{k+1}} = \frac{1}{e\pi}\cdot\frac{\frac{e}{\pi}}{1-\frac{e}{\pi}} = \frac{1}{\pi(\pi-e)}$

ⓑ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

$\lim_{+\infty} S_n = \lim_{+\infty}$ (nbre de termes $\times$ (premier terme)

$= \lim_{+\infty}\left(n \times \frac{n}{n^2+1}\right) = 1$

$\to S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$

$\lim_{+\infty} S_n = \lim_{+\infty}\left(n\cdot\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}\right)$

$= 1$

⑤ Somme de Césaro.

si $\lim_{+\infty} U_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{+\infty} \frac{U_1+U_2+\cdots+U_n}{n} = \ell$$

exemple

si $\lim_{+\infty}(U_{n+1}-U_n) = 2 \Rightarrow \lim_{+\infty}\left(\frac{U_n}{n}\right) = 2$

⑥ Somme de Riemann.

soit $S_n = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)$

$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)$.

avec f est continue sur $[a,b]$.

$$\lim_{+\infty} S_n = \lim_{+\infty} R_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemples

① $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

$\lim_{+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(2)$

② $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

$\lim_{+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{Arctan} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Cas particulier important

$$\boxed{a=0,\ b=1 \quad \lim_{+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx}$$

⑦ théorème de comparaison.

si $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n \leq U_n \leq W_n$

et $\lim\limits_{+\infty} V_n = \lim\limits_{+\infty} W_n = \ell$

alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = \ell$.

Exemples

① $\lim\limits_{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}\cos(n^2)\right)^n = 0$

② $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{2n + (-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}\right) = 2$

⑧ Autre

ⓐ $\lim\limits_{+\infty} \frac{a \cdot 9^n + b \cdot 7^n + c \cdot 5^n}{\alpha \cdot 3^n - \beta \cdot 9^n + \gamma} = -\frac{a}{\beta}$

Exemples

① $\lim\limits_{+\infty} \frac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n} = 1$

② $\lim\limits_{+\infty} \frac{5^{n+1} - 2 \cdot 3^n}{4^n - 7 \times 5^n} = -\frac{5}{7}$

③ $\lim\limits_{+\infty} \frac{5^n - 3^n}{3^n + 2^n} = \lim\limits_{+\infty}\left(\frac{5^n}{3^n}\right) = +\infty$

④ $\lim\limits_{+\infty} \frac{5^n - 3^n}{3^n - 4^n} = \lim\left(\frac{5^n}{-4^n}\right) = -\infty$

⑧ Suite définie par intégral

soit $U_n = \int_a^b f_n(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

→ si $f_n(x) \geq 0 \Rightarrow U_n \geq 0$

→ si $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \Rightarrow U_n \nearrow$

→ Pour déterminer une relation entre U_{n+1} et U_n, on utilise une intégration par partie.

Exemples

① $I_n = \int_1^e \ln^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

$I_0 = \int_1^e dx = e - 1$

$I_1 = \int_1^e \ln x\,dx = [x \cdot \ln x - x]_1^e = 1$

$I_{n+1} = e - (n+1) \cdot I_n$

② $I_n = \int_0^1 t^n \cdot e^{2t}\,dt$

$I_0 = \int_0^1 e^{2t}\,dt = \frac{e^2 - 1}{2}$

$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{(n+1)}{2} I_n$.

③ $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x\, e^{-nx}\,dx$, $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos x\, e^{-nx}\,dx$

$I_n + n J_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

III Sommes usuelles

① $\sum_{k=p}^{n} V_k = \frac{n-p+1}{2}(V_p + V_n)$

si (V_n) est suite arithmétique

② $\sum_{k=p}^{n} V_k = V_p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

si (V_n) est géométrique de raison q

③ $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

④ $\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

⑤ $\sum_{k=1}^{n} q^k = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

⑥ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

⑦ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

⑧ $\sum_{k=p}^{n} 1 = n-p+1$

⑨ $\sum_{k=p}^{n} \alpha = \alpha(n-p+1)$

⑩ Binôme de NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

et $n! = n(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

Cas particulier

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

A retenir

① pour $a = b = 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

exp $C_{2021}^0 + C_{2021}^1 + \cdots + C_{2021}^{2021} = 2^{2021}$

② pour $a = 1$, $b = -1$, on a:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$$

exp

$C_{2021}^0 - C_{2021}^1 + \cdots - C_{2021}^{2021} = 0$

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

IV. Nombres complexes.

Rappel

1) soit $z = x + iy$

$r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$.

$\theta \equiv \arg(z) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \ (2\pi)$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r \cdot e^{i\theta}$

2) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$

$\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 \ [\pi]$

3) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

$\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \ (\pi)$

4) $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

5) si $z = [r, \theta] = re^{i\theta}$

$\Rightarrow \bar{z} = [r, -\theta] = r.e^{-i\theta}$

$-z = [r, \pi+\theta] = r.e^{i(\pi+\theta)}$

$\frac{1}{z} = [\frac{1}{r}, -\theta]$, $z^n = [r^n, n\theta]$

6) $z = [r, \theta]$, $z' = [r', \theta']$

$z \times z' = [r.r', \theta + \theta']$

$\frac{z}{z'} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta']$

7) $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})}$

8) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

9) $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$

10) $(1+i)^2 = 2i$, $(1-i)^2 = -2i$

11) $\forall k \in \mathbb{N}$

$i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

12) $1 + i + i^2 + \dots + i^{2021} = 1 + i$

13) $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= e^{i2\pi/3}$

$1 + j + j^2 = 0$, $j^2 = \bar{j}$

14) $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$

$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$

15) A retenir

$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$

$\sin^3(\theta) = -\frac{1}{4}(\sin 3\theta + 3\sin\theta)$

Astuce

Pour vérifier les égalités précédentes, il suffit de remplacer θ par une valeur.

16) $Z = \frac{z-3}{z-4i}$, $A(3)$, $B(4i)$

$\rightarrow Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M(z) \sim$ une droite privé du point B

$\rightarrow Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M(z) \sim$ Cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B.

17) Ensembles de points

ⓐ $|z-1+2i| = |z+3i|$, $M(z)$
l'ensemble $M(z)$ est la médiatrice du segment $[AB]$ tq $A(1-2i)$, $B(-3i)$

ⓑ $|z-1+2i| = 3$
l'ensemble $M(z)$ est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(1-2i)$ et de rayon 3

ⓒ $|\bar{z}-1+2i| = 3$
l'ensemble $M(z)$ est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(1+2i)$ et de rayon 3.

ⓓ $|iz-1+2i| = 3$
l'ensemble $M(z)$ est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(-2-i)$ et de rayon 3

18) Angle orienté

ⓐ soient $A(a)$, $B(b)$ et $M(z)$
A, B et M sont alignés $\Leftrightarrow$ $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ $(A \neq B)$

ⓑ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \arg\left(\frac{z-a}{b-a}\right)$ $[2\pi]$

ⓒ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2}$ (π) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM}$
$\Leftrightarrow$ $\frac{z-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$

ⓓ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \equiv 0$ (π) $\Leftrightarrow$
A, B et M sont alignés

ⓔ $\frac{z-a}{b-a} = \pm i$ $\Leftrightarrow$ le triangle ABM est rectangle et isocél en A.

ⓕ $\frac{z-a}{b-a} = iy$ $(y \neq \pm 1)$ $\Leftrightarrow$

le triangle ABM est rectangle en A

19) Forme exponentielle.

ⓐ $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$

ⓑ $\cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$

ⓒ $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
$e^{i2\pi} = 1$ $e^{-i\pi/2} = -i$

20) La Rotation

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation R de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ

$\Leftrightarrow$ $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

$\Leftrightarrow$ $z' = e^{i\theta}z + w(1 - e^{i\theta})$

21) Les quadrilatères particuliers

ⓐ ABCD est un parallélogramme
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow$ $z_B - z_A = z_C - z_D$

ⓑ ABCD est un losange $\Leftrightarrow$
ABCD est un parallélogramme + $AB = AD$

$\Leftrightarrow$ $AB = BC = CD = DA$

N.B $AB = |z_B - z_A|$

V. Fonction Arctan

① soit $f(x) = \tan x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[= I$
la fonction f est continue et strictement croissante sur I
la fonction réciproque f^{-1} est appelée Arctangente et notée $x \mapsto \text{Arctan}$ définie sur J tel que $J = \tan(I) =]-\infty, +\infty[$

② La fonction Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

③ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$$\text{Arctan}\, x = y \Leftrightarrow x = \tan y$$

④ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\text{Arctan}\, x = \text{Arctan}\, y \Leftrightarrow x = y$

⑤ $\lim\limits_{-\infty} \text{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2}$
$\lim\limits_{+\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}$

⑥ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}\, x$

⑦ $\forall x \in \mathbb{R}$
$$(\text{Arctan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\text{Arctan}(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

⑧ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Arctan}\, x}{x} = 1$.

⑨ $\forall x \in \mathbb{R}^*$
$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$
$(x > 0 \to \frac{\pi}{2})$, $(x < 0 \to -\frac{\pi}{2})$

⑩ $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\cos(\text{Arctan}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\sin(\text{Arctan}\, x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

⑪ $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

⑫

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\text{Arctan}\, x$
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	x

⑬ Résultat

ⓐ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = [\text{Arctan}\, x]_0^1 = \pi/4$

ⓑ $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\, dx = [\text{Arctan}(x+2)]_{-2}^{-1} = \frac{\pi}{4}$

ⓒ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2}\, dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\, \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

ⓓ $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx = [\text{Arctan}(u(x))]_\alpha^\beta$
si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

⑭ Autre

ⓐ $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $\tan(x + k\pi) = \tan x$

ⓑ $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

ⓒ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\tan(\text{Arctan}\, x) = x$
$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\text{Arctan}(\tan x) = x$

VI. Calcul integral.

① A retenir

fonction	Primitive
$f' \cdot f^n \;, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} \cdot f^{n+1} + c$
f'/f^2	$-1/f + c$
f'/f	$\ln\lvert f\rvert + c$
$f'/\sqrt{f}$	$2\sqrt{f} + c$
$f' \cdot e^f$	$e^f + c$

Exemples

ⓐ $$\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{1/3}}{x^4}\,dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{x.\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{1/3}}{x^4}\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{1/3} dx = 6$$

ⓑ $$\int_0^1 \frac{3x}{\frac{9}{2}x^4 + 6x^2 + 2}\,dx = \int_0^1 \frac{6x}{9x^4 + 12x^2 + 4}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{6x}{(3x^2+2)^2}\,dx = \frac{3}{10}$$

ⓒ $$\int_1^e \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = \left[\ln\left|1+\ln^2 x\right|\right]_1^e$$

ⓓ $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \left[-2\sqrt{\cos x}\right]_0^{\pi/2}$$

ⓔ $$\int_0^1 x^2.e^{x^3}\,dx = \left[\frac{1}{3}\,e^{x^3}\right]_0^1$$

ⓕ $$\int_1^3 |2x^2-8|\,dx = \int_1^2 |2x^2-8|\,dx + \int_2^3 |2x^2-8|\,dx$$

② Intégration par parties.

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \left[f(x).g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)\,dx$$

Exemples

ⓐ $$I = \int_1^e \cos(\ln x)\,dx = \int_1^e x'.\cos(\ln x)\,dx$$

$$= \left[x.\cos(\ln x)\right]_1^e + \int_1^e \sin(\ln x)\,dx$$

$$= \left[x.\cos(\ln x)\right]_1^e + \left[x.\sin(\ln x)\right]_1^e - I$$

$$\Longrightarrow I = \frac{e\cos 1 - 1 + e\sin 1}{2}$$

ⓑ $$\int_a^b x e^x\,dx = \left[x e^x - e^x\right]_a^b = \left[(x-1)e^x\right]_a^b$$

ⓒ $$\int_a^b \operatorname{Arctan} x\,dx = \left[x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$$

③ Integration par changement de variable.

$$\int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx$$

Exemple

ⓐ $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dt$$

ⓑ si $f(a+b-x) = f(x)$ alors

$$\int_a^b t.f(t)\,dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,dt$$

③ Intégral de Walis

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$

$$U_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$U_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Rq
$2n \longrightarrow \pi$
$2n+1 \longrightarrow \cancel{\pi}$

Exemple

① $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x \, dx \overset{n=3}{=} \frac{2^6 (3!)^2}{7!} = \frac{16}{35}$

② $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx \overset{n=3}{=} \frac{6!}{2^6 . (3!)^2} . \frac{\pi}{2}$

④ A retenir

soit $I = \int_a^b e^x \cdot \cos(\alpha x) dx$

$$J = \int_a^b e^x . \sin(\alpha x) dx$$

$$I = Re\left(\int_a^b e^x \times e^{i\alpha x} dx \right) = Re \int_a^b e^{(1+i\alpha)x} dx$$

$$J = Im\left(\int_a^b e^{(1+i\alpha)x} dx \right)$$

Rappel : $\int_a^b e^{mx} dx = \left[\frac{1}{m} e^{mx} \right]_a^b$

Exemple

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, e^x \, dx = Im\left(\int_0^{\pi/2} e^{(1+i)x} dx \right)$$

⑤ Décomposition en éléments simples

ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{x(x+1)} dx = \left[\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \right]_a^b$$

ⓑ si $f(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha x + \beta} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{x_1 - x_2} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{x_2 - x_1} = -a$$

Exples

① $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

$$= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

$$a = \frac{1}{1-2} = -1 , \quad b = 1$$

Donc $\int_\alpha^\beta f(x) dx = \int_\alpha^\beta \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx$

$$= \left[\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \right]_\alpha^\beta$$

② $\int_\alpha^\beta \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int_\alpha^\beta \frac{x}{(x-1)(x-2)} dx$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \right) dx$$

$$a = \frac{x_1}{x_1 - 2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$b = \frac{x_2}{x_2 - x_1} = \frac{2}{2-1} = 2$$

③ $f(x) = \dfrac{1}{x^3-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$= \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

avec a, b et C à déterminer

VII Rappel sur les fonctions numériques.

① A retenir

le signe de $\frac{a}{b}$ est le même de $a \times b$ avec $b \neq 0$

Exple $f(x) = \ln(x^2-3x+2)$

$g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$

$D_f = D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2>0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x-1}{x-2} > 0\}$

$=]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

② $(f^{-1})'(\beta) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\beta))}$

si $f(\alpha) = \beta \Rightarrow \alpha = f^{-1}(\beta)$

③ C_f admet une tangente horizontale en $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

③ Si $f(x) = u(x) \cdot e^{V(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = \left(u'(x) + u(x) \cdot V'(x)\right) \cdot e^{V(x)}$

④ si f est déri. en $x_0 \Rightarrow$ cont. en x_0

⑤ f n'est pas cont en $x_0 \Rightarrow$ f n'est pas déri en x_0.

⑥ si $f(x) = ax+b+h(x)$, avec $\lim\limits_{\pm\infty} h(x) = 0$ alors la droite $(\Delta): y = ax+b$ est asymptote oblique de C_f au vois de $\pm\infty$.

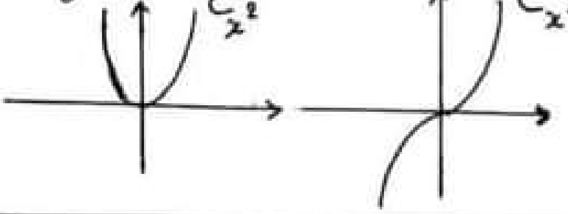
⑦ $\Omega(a,b)$ est centre de symetrie de C_f si $f(2a-x) = 2b - f(x)$ ou $f(2a-x) + f(x) = 2b$

⑧ $(\Delta): x = a$ est axe de symetrie de C_f si $f(2a-x) = f(x)$

Cas particuliers

$\rightarrow$ la fonction impaire admet le centre $O(0,0)$ comme centre de symetrie

$\rightarrow$ la fonction paire admet l'axe (Oy) comme axe de symetrie.



Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

(9) $f''(x) > 0 \Rightarrow C_f$ est $\cup$

$f''(x) < 0 \Rightarrow C_f$ est $\cap$

(10) $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

Résultats

$\longrightarrow \lim_{-\infty} e^{x}(\cos x - \sin x) = 0$

$\longrightarrow \lim_{+\infty} \dfrac{2x + (-1)^{x}}{x + \cos x} = 2$

$\longrightarrow \lim_{+\infty} \left(\frac{1}{5}\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3}\cos(n^2)\right)^{n} = 0$

(11) $\left(\ln|f(x)|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(12) $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

$\longrightarrow \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' = \dfrac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

$\longrightarrow \left(e^{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$.

(13) $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{x} > 0$

(14)

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

(15) l'equation du tangente de C_f au point x_0 est :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

(16) si f est strictement monotone sur $I \Rightarrow f$ est injective sur I

(17) si f est continue sur I

$\Rightarrow f$ est surjective sur I

(18) si f est injective et surjective

$\Rightarrow f$ admet une fonction réciproque (bijective) sur J avec $J = f(I)$

(19) $f([a,b]) \xrightarrow{f \nearrow} [f(a), f(b)]$

$f([a,b]) \xrightarrow{f \searrow} [f(b), f(a)]$

$f([a,b]) \xrightarrow{f \nearrow\searrow} [m, M]$

avec $m = \min f(x)$, $M = \max f(x)$

(20) si f est impaire alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

(21) si f est paire alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

تم والحمد لله

09/07/2021 à 01:07

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

VIII Géométrie dans l'espace

① Expressions analytiques :

Soient $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$

→ produit scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = aa' + bb' + cc'$$

→ Norme $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

→ Produit vectoriel

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$

Resultats

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}$

$\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ colineaires

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$$
$$= \frac{1}{2}.AB.AC.\sin(\hat{A})$$

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

② PLan

→ $\vec{n}(a,b,c)$ est normal au $(P) \iff ax+by+cz+d=0$

→ $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ est vecteur normal au plan (ABC), et l'eq. cartésienne du plan (ABC) peut déterminer :

$$M(x,y,z)\in(ABC) \iff \vec{AM}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{AC}) = 0$$

→ Distance du $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ au plan (P) : $ax+by+cz+d=0$

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

③ Sphère

→ L'equation cartésienne d'une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$

→ L'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\vec{AM}\cdot\vec{BM} = 0$ est la sphère de diamètre [AB].

④ Intersection d'une sphère et plan

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon R et le plan (P).

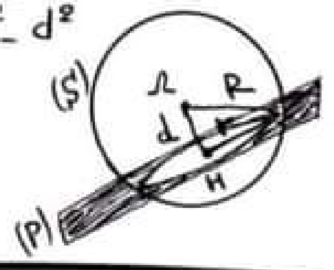
Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan (P)

on pose $d = \Omega H = d(\Omega,(P))$

→ Si $d>R$ $(S)\cap(P) = \phi$

→ Si $d=R$ $(S)\cap(P) = \{H\}$

→ Si $d<R$ (P) coupe (S) selon un cercle (C) de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2-d^2}$



Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

⑤ Intersection d'une sphère et droite

→ Une représentation paramétrique d'une droite (Δ) qui passe par le point $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et dirigée par le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est :

$$\begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} \quad / \; t \in \mathbb{R}$$

→ si $(\Delta) \perp (P)$, alors le vecteur normal au (P) est directeur de (Δ).

Important :

Pour déterminer l'intersection du droite (Δ) (définie par une représentation paramétrique) et la sphère (S) définie par l'equation : (E) :

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

on remplace x, y et z du représentation parmaterique de (Δ) dans l'eq. (E), on aura une equation du 2ème degré dont l'inconnue est t

→ si l'equation obtenue (ent) n'admet pas de solution donc :

$(\Delta) \cap (S) = \phi$

→ si l'equation admet une solution unique t_0, alors

$(\Delta) \cap (S) = \{H\}$

on remplace t_0 par sa valeur dans : $\begin{cases} x = \ldots \\ y = \sim \\ z = - \end{cases}$

D'ou $H(x_H, y_H, z_H)$

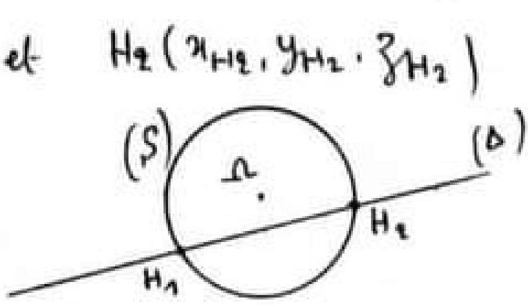
→ si l'equation admet deux solutions t_1 et t_2 alors :

$(\Delta) \cap (S) = \{H_1, H_2\}$

Les coordonnées de H_1 et H_2 se déterminent par remplacement les valeurs de t_1 et t_2 dans la representation paramétrique de (Δ) : $\begin{cases} x = - - \\ y = - \\ z = - - \end{cases}$

D'ou $H_1(x_{H_1}, y_{H_1}, z_{H_1})$

et $H_2(x_{H_2}, y_{H_2}, z_{H_2})$



Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

IX. Dénombrement

① Les nombres C_n^p, A_n^p et $n!$

→ $n! = n(n-1)(n-2)\times \dots \times 2\times 1$

$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 2$

→ $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^{n-p}$

→ $C_n^p = C_n^{n-p}$,

→ $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

→ $C_n^n = C_n^0 = 1$

→ $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$

→ $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$

→ $A_n^n = n!$

② Types de tirages

on tire p objets parmi n objets

→ si le tirage se fait simultané (l'ordre n'est pas d'importance) donc le nombres de tirages possible est : C_n^p

→ si le tirage se fait successif sans remise (l'ordre est important) donc le nombre de tirages possibles est : A_n^p

→ si le tirage se fait sscessifs avec remise (l'ordre est important) donc le nombre de tirages possibles est n^p

→ le nombre de tirages possibles est noté $\text{card}\,\Omega$ avec Ω l'univers associé à une experience aléatoire.

X. Probabilités

s'il y a équiprobabilite (exprience aléatoire) donc :

$\forall A \subset \Omega$, $P(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$

card(A) : nbres des cas favorables

card(Ω) : nbres des cas possibles

→ $\forall A \subset \Omega$, $0 \le P(A) \le 1$

→ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

($\bar{A}$ est l'evenemt contraire de A)

→ $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

→ si A et B sont incompatibles

$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

→ si A et B sont indépendants

$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

→ La probabite de B sachant que A est réalisé est $P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

XI. Suppléments

① Soit l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$

→ si $a+b+c=0 \Rightarrow S=\{1, \frac{c}{a}\}$

Exp : $x^2+2021x-2022=0$

$S=\{1,-2022\}$

→ si $a-b+c=0$ $(a+c=b)$

$\Rightarrow S=\{-1,-\frac{c}{a}\}$

Exp → $x^2+1442x+1441=0$

$S=\{-1,-1441\}$

→ $2022x^2-3465x+1443=0$

$S=\{1, \frac{1443}{2022}\}$

→ si (E) admet deux solutions x_1 et x_2 donc $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

② Soit l'équation :

(E) : $ax^3+bx^2+cx+d=0$

si (E) admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 donc

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \\ x_1.x_2+x_1.x_3+x_2.x_3=\frac{c}{a} \\ x_1.x_2.x_3=-\frac{d}{a} \end{cases}$$

Exp : (E) : $x^3-2x+1=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1.x_2+x_1.x_3+x_2.x_3=-2 \\ x_1.x_2.x_3=-1 \end{cases}$$

→ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3$.

③ si $f(x)=ax+b+h(x)$ et : $\lim\limits_{\pm\infty} h(x)=0$ donc la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique de C_f au $\pm\infty$

→ si $\lim\limits_{\pm\infty}(f(x)-ax)=b$ alors (D) : $y=ax+b$ est oblique de C_f

→ si $f(x)=ax+b+h(x)$ et $\lim\limits_{\pm\infty} h(x)=c$ $(c\in\mathbb{R})$ alors l'asymptote oblique de C_f est d'éq : $y=ax+b+c$ au $\pm\infty$

Exple : $f(x)=\frac{2(x^2-1)+x+3\ln x}{x+1}$

(Δ) : $y=2x-1$

$f(x)=2x+1-\frac{x^4}{x^4+1}$

(D) : $y=2x$.

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

④ $\Omega(a,b)$ est centre de symétrie de C_f si $f(2a-x)+f(x)=2b$

exp $f(x)=\dfrac{2e^{x/2}}{1-e^{x-2}}$

$\Omega(1,0)$ est centre de symétrie de C_f

→ si $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

le centre est $\Omega\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$

→ si $f(x)=ax^2+bx+c$

l'axe est la droite d'éq: $x=\dfrac{-b}{2a}$

⑤ Les limites usuelles

$\lim\limits_{0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{0}\dfrac{\tan x}{x}=1$
$\lim\limits_{0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$	$\lim\limits_{0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$
$\lim\limits_{0^+}\ln x=-\infty$	$\lim\limits_{+\infty}\ln x=+\infty$
$\lim\limits_{0^+}x^n\ln x=0^-$	$\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0^+$ $n\in\mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$	
$\lim\limits_{-\infty}e^x=0^+$	$\lim\limits_{+\infty}e^x=+\infty$
$\lim\limits_{-\infty}x^n.e^x=0$	$\lim\limits_{-\infty}xe^x=0^-$
$\lim\limits_{+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$	

N.B

→ $\lim\limits_{+\infty}\left(\dfrac{\ln(P(x))}{Q(x)}\right)=0$

si $\lim\limits_{+\infty}P(x)=\lim\limits_{+\infty}Q(x)=+\infty$

→ $\lim\limits_{+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^a$

⑥ si f est continue sur I et $a\in I$

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$$

exp on a: $\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t}\,dt=\ln x$

$$\left(\int_1^x\frac{1}{t}\,dt\right)'=\frac{1}{x}$$

⑦ Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

exp $I=\displaystyle\int_1^3|2x^2-8|\,dx$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2x^2-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $I=\displaystyle\int_1^2|2x^2-8|\,dx+\int_2^3|2x^2-8|\,dx$

$=\displaystyle\int_1^2(-2x^2+8)\,dx+\int_2^3(2x^2-8)\,dx$

$=\left[-\dfrac{2}{3}x^3+8x\right]_1^2+\left[\dfrac{2}{3}x^3-8x\right]_2^3$

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

⑧ La dérivée nième d'une fonction

est la dérivée d'ordre que l'on note $f^{(n)}(x)$ et on a :

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Exp $f^{(2)}(x) = f''(x) = \left(f'(x)\right)'$

soit $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $x \geq 0$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Pour le vérifier, il suffit de calculer $f'(x)$ et de remplacer n par 1 dans $f^{(n)}(x)$.

⑨ Equations trigonometriques.

→ $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$

→ $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$

→ $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

→ $\cos x = 0 \Leftrightarrow S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

→ $\sin x = 0 \Leftrightarrow S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

→ $\tan x = 1 \Leftrightarrow S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

→ $\sin x = 1 \Leftrightarrow S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

⑩ Nombre de solutions de $f(x) = \lambda$

→ si $\deg f = 2$ et $\lambda = 0$

le nombre de solutions de l'eq $f(x) = 0$ dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$ $\left(f(x) = ax^2 + bx + c\right)$

Exp1 $\begin{cases} f(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ \int_{-1}^{1} f(x)\,dx < 2 \end{cases}$

$\Delta = 4a^2 - 12b$ avec $b < 0$ car $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx < 0$

donc l'eq. $f(x) = 0$ admet 2 sols

Exp2 $f(x) = x^5 + x - 1$.

En utilise les variations de f.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow$ solution unique.

Exp3

Le tableau ci-contre presente les variations de f.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

l'equation $f(x) = \lambda$ admet 2 solutions exactement lorsque

$\boxed{\lambda = 0}$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$

$f(x) = \lambda \Leftrightarrow C_f \cap (\Delta)$ $\left((\Delta) : y = \lambda\right)$

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

Conclusion

→ Les solutions de l'equation $f(x)=\lambda$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite (Δ) d'equation $y=\lambda$.

→ On peut déterminer l'intersection de (Δ) avec C_f à partir du tableau de variations de f.

(11) Les suites

→ Suite arithmétique

Définition : $U_{n+1}=U_n+r$, r : raison

Therme général : $U_n=U_p+(n-p)r$

Propriété : $U_{n+1}+U_{n-1}=2.U_n$

Somme : $S_n=\sum_{k=p}^{n}U_k$

$$=\frac{n-p+1}{2}(U_p+U_n)$$

→ Suite géometrique

Définition : $U_{n+1}=q.U_n$, q : raison

Therme général : $U_n=q^{n-p}.U_p$

Propriete : $U_{n+1}.U_{n-1}=U_n^2$

Somme : $S_n=\sum_{k=p}^{n}U_k$

$$=U_p.\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\quad(q\neq1)$$

(+) → si $-1<q<1$ $\lim_{+\infty}q^n=0$

→ $\lim_{+\infty}S_n=\frac{U_p}{1-q}$.

→ Suites homographiques

soit $\begin{cases}U_0\in\mathbb{R}\\ U_{n+1}=\frac{aU_n+b}{cU_n+d}\end{cases}$, $ad-bc\neq0$

• si l'equation $\frac{ax+b}{cx+d}=x$ admet deux solutions distinctes α et β (α et β sont les points fixes de la fonction $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$) alors

→ la suite, $\forall n\in\mathbb{N}$ $V_n=\frac{U_n-\alpha}{U_n-\beta}$

est géométrique de raison

$$q=\frac{a-c\alpha}{a-c\beta}$$

→ si $|q|>1$ alors $\lim(U_n)=\beta$

→ si $|q|<1$ alors $\lim(U_n)=\alpha$

→ si $q=-1$, on exprime V_n puis U_n en fonction de n pour déterminer la limite.

Exp Calculer $\lim U_n$ tq

$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\frac{U_n-6}{U_n-4}\end{cases}$, $\begin{cases}U_0=2\\ U_{n+1}=\frac{U_n+1}{3-U_n}\end{cases}$

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

/

Prof B.LOUKILIA

∴ si la fonction f admet un seul point fixe α, alors la suite : $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = \dfrac{1}{U_n - \alpha}$ est arithmétique de raison $\dfrac{2c}{a+d}$.

→ On exprime V_n puis U_n en fonction de n pour déterminer $\lim U_n, \lim V_n$

∴ Si (U_n) à termes non nuls tq $|U_{n+1} - \alpha| \leq k\,|U_n - \alpha|$ et $|k| < 1$ alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = \alpha$

∴ Si (U_n) à termes strictement > 0 tq $U_{n+1} > k\,U_n$ et $k > 1$ alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = +\infty$

∴ si $\lim (U_n) = l$ alors $\lim \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} U_k = l$ (Cézaro)

→ Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

→ Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Exp : $U_0 = -2022$, $U_{n+1} = e^{U_n} + U_n$

(12) Les complexes

→ Soit $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $r > 0$

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

→ $z \in \mathbb{R}^* \iff \mathrm{Im}(z) = 0\ (y = 0) \iff \bar{z} = z \iff \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$

→ $z \in \mathbb{R}^*_+ \iff \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$

→ $z \in \mathbb{R}^*_- \iff \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]$

→ $z \in i\mathbb{R}^* \iff \mathrm{Re}(z) = 0\ (x = 0) \iff \bar{z} = -z \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

→ $z \in i\mathbb{R}^*_+ \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

→ $z \in i\mathbb{R}^*_- \iff \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

→ $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = 2x$

→ $z - \bar{z} = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

→ $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2i}$

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

→ Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$

→ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \ [2\pi]$

→ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \ [2\pi]$

→ A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0 \ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \quad (A \neq B)$$

→ $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv 0 \ [\pi]$

→ $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$

→ A, B, C et D sont alignés ou cocycliques (appartiennent au même cercle) $\Leftrightarrow$

$$\frac{d-a}{b-a} \times \frac{b-c}{d-c} \in \mathbb{R}$$

ou $$\frac{d-a}{b-a} \div \frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$$

→ G est le barycentre de $\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

$$z_G = \frac{\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

→ L'ecriture complexe d'une translation T de vecteur $\vec{u}(b)$ est

$$z' = z + b \quad (b \in \mathbb{C})$$

→ L'ecriture complexe d'une homothétie h de centre $\Omega(w)$ et de rapport k $(k \in \mathbb{R}^* - \{1\})$ est :

$$z' - w = k(z - w)$$

→ L'ecriture complexe d'une rotation R de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ $(\theta \in \mathbb{R})$ est :

$$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$$

→ **Nature de f :** $z' = az + b$

- si $a = 1$ f est translation $T(\vec{u}(b))$
- si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, f est une homothétie de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et de rapport a
- si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$, alors f est une rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\arg(a)$

BE

Toutes les astuces de Mathématiques pour préparer les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Prof B.LOUKILIA

13 Calcul intégral

A retenir

① $\int_a^b \ln x \, dx = \left[x\ln x - x\right]_a^b$

② $\int_a^b x e^x \, dx = \left[x e^x - e^x\right]_a^b$

③ $\int_a^b \tan x \, dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_a^b$

④ $\int_a^b \sin x \cdot e^x \, dx = \frac{1}{2}\left[e^x(\sin x - \cos x)\right]_a^b$

⑤ $\int_a^b \cos x\, e^x \, dx = \frac{1}{2}\left[e^x(\sin x + \cos x)\right]_a^b$

exp: $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot e^x \, dx = \frac{1+e^{\pi/2}}{2}$.

⑥ $\int_\alpha^\beta \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \overset{\Delta>0}{=} \left[\ln(u(x))\right]_\alpha^\beta$

⑦ $\int_\alpha^\beta \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \overset{\Delta<0}{=} \left[\operatorname{Arctan} u(x)\right]_\alpha^\beta$

exp $I = \int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

$J = \int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

14 Equations différentielles

① Soit (E) : $y' = ay + b$

$\longrightarrow y(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$, $a \neq 0$

② Soit (E) : $y'' + ay' + by = 0$

et (E_c) : $r^2 + ar + b = 0$

. Si (E_c) admet deux solutions r_1 et r_2 donc :

$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

.. Si (E_c) admet solution unique r_0 donc :

$y(x) = (\alpha x + \beta) \cdot e^{r_0 x}$

∴ Si (E_c) admet deux solutions complexes conjugués r_1 et r_2 tq $r_1 = p + iq$ donc

$y(x) = e^{px}(\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

B.L

Test mathématique pour Faculté de medecine et pharmacie

Cocher la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Durée 30 min

Question 1

① $z = \frac{2+4i}{2-i}$ Ⓐ $z = \bar{z}$ Ⓑ z est imaginaire pur
Ⓒ $z = \frac{2}{3}i$ Ⓓ Le point $M(z)$ est sur le cercle trigo.

② $z = \sqrt{3} - i$ Ⓐ $\arg(z) \equiv -\frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$ $\arg(\bar{z}) \equiv \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$
Ⓒ le point $M(z)$ est sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$
Ⓓ le point $M(z^2)$ est l'axe des ordonnées.

③ z vérifie $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$, l'écriture algébrique de z est :
Ⓐ $\frac{8}{3} - 2i$ Ⓑ $-\frac{8}{3} - 2i$ Ⓒ $\frac{8}{3} + 2i$ Ⓓ $-\frac{8}{3} + 2i$

④ $z = (1+i)^{2022}$ Ⓐ z est réel Ⓑ $z = 2^{1011} i$
Ⓒ $z = -2^{1011} i$ Ⓓ $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Question 2

① $\lim\limits_{+\infty} \frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+1}$ Ⓐ 2 Ⓑ 1 Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ 0

② $\lim\limits_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ Ⓐ 2 Ⓑ 1 Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ 0

③ $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{k+1}}{\pi^{k-1}}$ Ⓐ $\frac{1}{\pi(\pi-e)}$ Ⓑ $\frac{\pi}{\pi+e}$ Ⓒ $\frac{\pi}{\pi-e}$ Ⓓ $\frac{\pi e^2}{\pi-e}$

④ Soit $U_0 = 1$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{5}{U_n}\right)$, $\lim U_n$ est,
Ⓐ 5 Ⓑ 0 Ⓒ n'existe pas Ⓓ $+\infty$

⑤ $U_0 = \frac{1}{2}$, $U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1$, $\lim U_n$ est,
Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 2 Ⓓ -1

Prof B. Louhilia

Test mathematique pour Faculte de medecine et de pharmacie

Cocher la bonne reponse, Aucune justification n'est demandeé

Dureé 30 min

Question 3

① $\lim_{+\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x^2+3} =$ Ⓐ $+\infty$ Ⓑ $-\infty$ Ⓒ 0 Ⓓ $\frac{1}{6}$

② $\lim_{+\infty} \sqrt{x^2-x+1} - x =$ Ⓐ $+\infty$ Ⓑ $-\infty$ Ⓒ 0 Ⓓ $\frac{-1}{2}$

③ $\lim_{-\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x =$ Ⓐ $+\infty$ Ⓑ $-\infty$ Ⓒ 0 Ⓓ $-\frac{1}{2}$

④ $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{3x^3+x^2-2x-2}{2x^2-3x+1}} =$ Ⓐ 1 Ⓑ -1 Ⓒ 3 Ⓓ 0

⑤ $\lim_{0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$ Ⓐ 1 Ⓑ 0 Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ $+\infty$

⑥ $\lim_{1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - \sqrt[3]{x+7}}{\sin(x^2-x)}$ Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ $\frac{1}{6}$ Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ $-\frac{1}{6}$

Question 4

① $\int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \frac{1}{3} x \, dx =$ Ⓐ $-\frac{3}{12}$ Ⓑ $\frac{1}{12}$ Ⓒ $\frac{1}{24}$ Ⓓ 0

② $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin^7(x) dx$ Ⓐ 0 Ⓑ $\frac{35}{16}$ Ⓒ $\frac{35}{16}\pi$ Ⓓ $-\frac{35}{16}\pi$

③ la fonction primitive de $x \mapsto xe^x$ est

Ⓐ $F(x) = (x-1)e^x$ Ⓑ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x$

Ⓒ $F(x) = (x+1)e^x$ Ⓓ $F(x) = \frac{1}{2}(x-1) \cdot e^x$

④ $\int_0^1 -2xe^x dx =$ Ⓐ $1-e^{-1}$ Ⓑ $e^{-1}-1$ Ⓒ e^{-1} Ⓓ Autre

⑤ $\int_1^e \ln x \, dx =$ Ⓐ 1 Ⓑ e Ⓒ $e-1$ Ⓓ $1-e$

Prof. B. Louhilia